

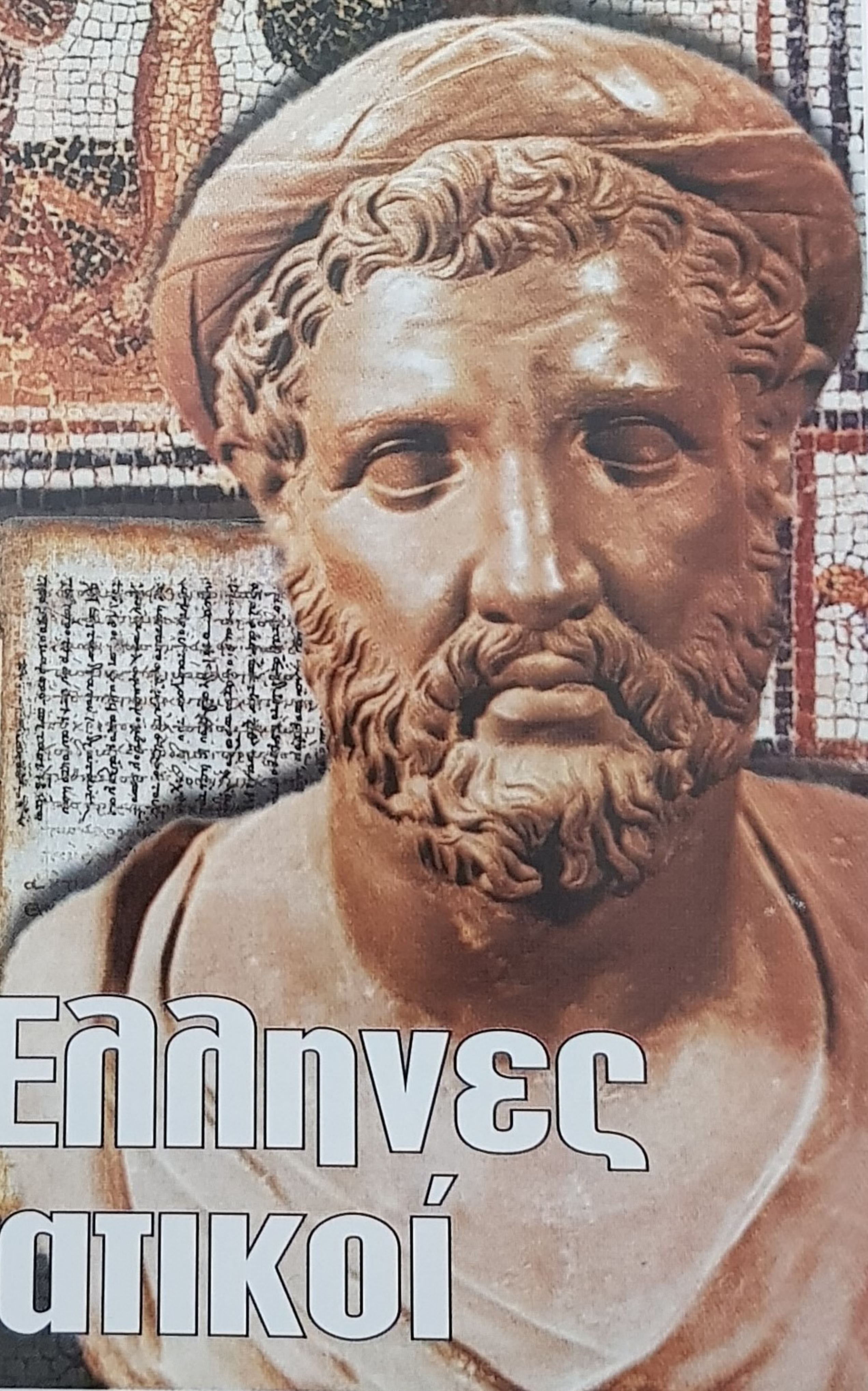
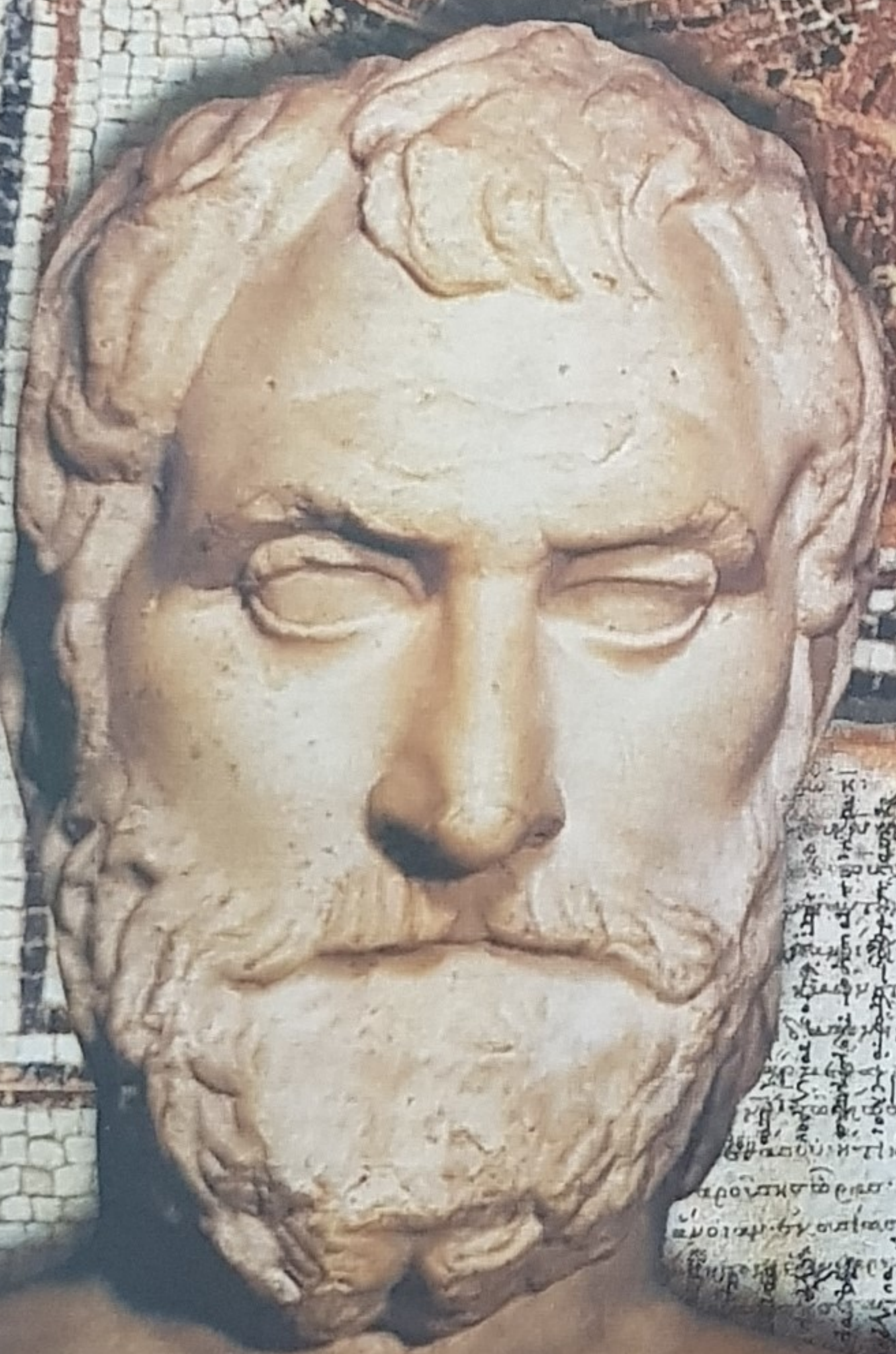
Ε

ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΗ

14 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2002

122

ΙΣΤΟΡΙΚΑ



Αρχαίοι Έλληνες
μαθηματικοί

ΙΣΤΟΡΙΚΑ



Αποτύπωση
αγγείου
της κλασικής
περιόδου
που απεικονίζει
μαθηματικές
δραστηριότητες
των αρχαίων
Ελλήνων

Η παγκόσμια παρακαταθήκη

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ, ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ, ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ.

Πόσα εκατομμύρια άνθρωποι καθημερινά σ' όλο τον κόσμο εφαρμόζουν τις θεωρίες τους; Κι ας εκπορεύονται από μια εποχή έως και 3.000 χρόνια πριν.

Αυτοί οι Έλληνες θεωρητικοί μαθηματικοί, με το Πυθαγόρειο θεώρημα, την Ευκλείδειο γεωμετρία, την περίφημη ανακάλυψη που συνοψίστηκε στις φράσεις «Δος μοι πα στω και ταν γαν κινάσω» (Δος μου τόπο να σταθώ και θα κινήσω τη Γη), είναι οι πρωτοπόροι της μαθηματικής επιστήμης, αυτοί που όχι μόνο έβαλαν τα λιθάρια για την εξέλιξή της, αλλά και την προήγαγαν όσο κανείς σύγχρονος δεν φαντάζεται.

Εκτός όμως από το θεωρητικό κλάδο της μαθηματικής επιστήμης, υπήρξε και ο εφαρμοσμένος, που περιελάμβανε τις τέχνες λογιστική, γεωδαισία, οπτική, κανονική, μηχανική και αστρονομία. Μεγάλα ονόματα ο Ηρών ο Αλεξανδρεύς, ο Θαλής ο Μιλήσιος, ο Δημόκριτος ο Αβδηρίτης, με έργα που διασώζονται ως τα σήμερα.

Κι αν αυτούς τους μεγάλους μαθηματικούς τους γνωρίζουν όλοι, πόσοι άραγε γνωρίζουν τη στρατιά των γυναικών μαθηματικών που διέπρεψαν, με πρώτη την Αΐδρα από το 10ο αιώνα π.Χ., την Πολυγνώτη τον 7ο και τις άλλες που ακολούθησαν; Τη Θεμιστόκλεια, τη Θεανώ, τη Δαμώ, την Αριγνώτη, τη Μυία...

Μεγάλη κληρονομιά, δυσβάστακτη.

ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ

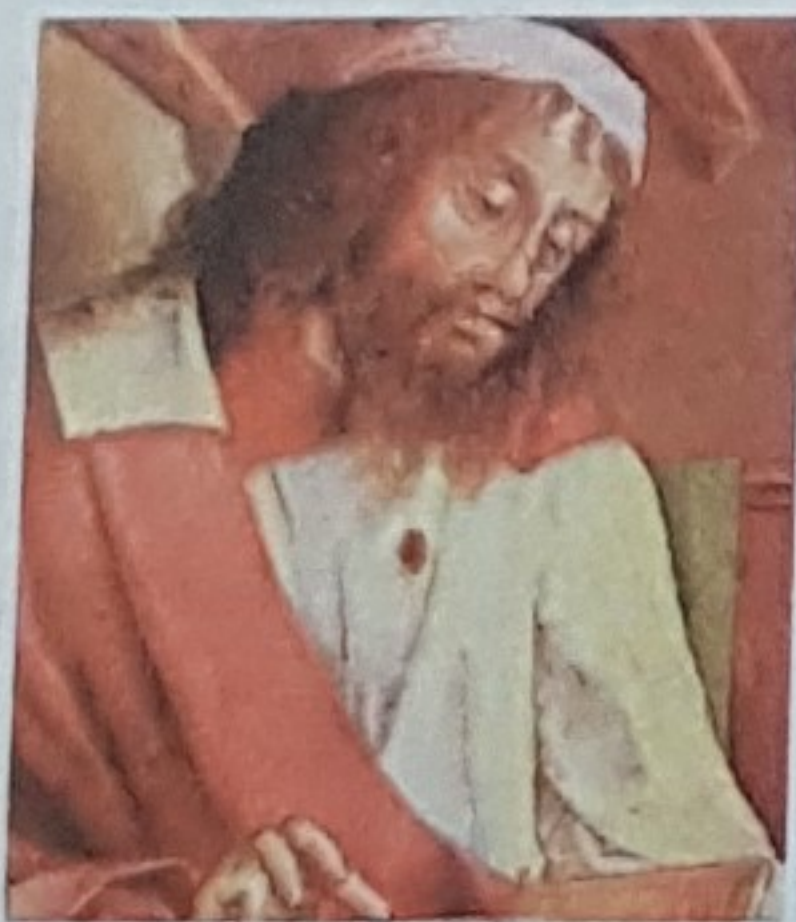
Το χρονικό



Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΚΑΙ Η ΣΧΟΛΗ ΤΟΥ

Τα ιερά
μαθηματικά:
επιστήμη και
φιλοσοφία

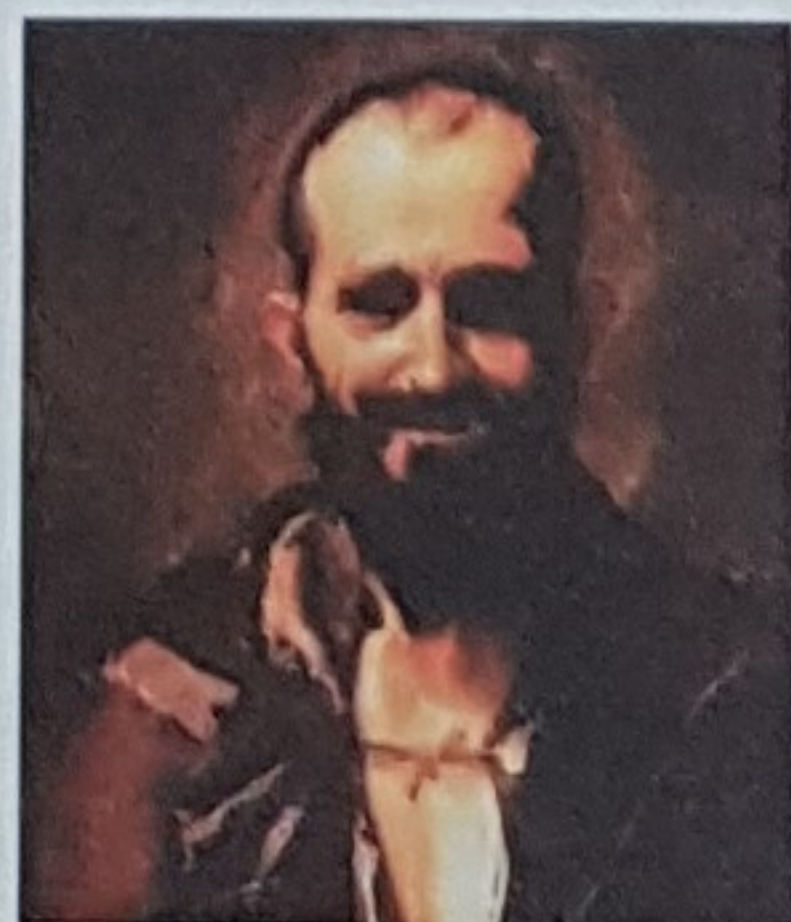
6



ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Ο ΣΤΟΙΧΕΙΩΤΗΣ

Ο «αθάνατος»
Αλεξανδρινός,
που μας
είναι «άγνωστος»

12



ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ: ΤΟ ΘΕΪΚΟ ΜΥΑΛΟ

Κανείς δεν
θεωρήθηκε
μεγαλύτερος
μαθηματικός

20

Υπεύθυνος έκδοσης ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ

Σύνταξη ύλης
ΝΑΣΟΣ ΓΚΟΛΕΜΗΣ

Σύμβουλος έκδοσης
ΣΤΕΡΙΟΣ ΦΑΣΟΥΛΑΚΗΣ

Σ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν
ΓΙΑΝΝΗΣ ΘΩΜΑΪΔΗΣ
ΜΑΡΩ Κ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΟΥΛΟΣ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΣΠΑΝΔΑΓΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΤΣΙΜΠΟΥΡΑΚΗΣ
ΧΡΙΣΤΙΝΑ Π. ΦΙΛΗ

Δημιουργικό
ΝΙΚΟΣ ΚΕΧΑΓΙΑΣ
ΑΓΓΕΛΙΚΗ ΤΖΑΝΕΤΟΠΟΥΛΟΥ
ΣΟΦΙΑ ΔΡΑΚΑΚΗ

Παραγωγή
ΦΩΤΟΕΚΔΟΤΙΚΗ Α.Ε.

Συντονισμός - επιμέλεια ΝΙΚΟΣ ΒΑΡΔΙΑΜΠΑΣΗΣ
Μόνιμοι συνεργάτες ΦΑΙΔΩΝ ΜΑΛΙΓΚΟΥΔΗΣ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΔΑΣΗΣ - ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ

Ηλεκτρονική διεύθυνση istorika@enet.gr

Το παρόν περιοδικό παρέχεται δωρεάν
μαζί με την ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ



Λέων ο Μαθηματικός

Η πιο πολύτιμη πνευματική παρακαταθήκη που έχει κληροδοτήσει ο Μεσαίωνας σ' εμάς τους μεταγενέστερους είναι, όπως παρατηρούσαμε σε προηγούμενο τεύχος των «Ιστορικών», η διάσωση ενός μεγάλου μέρους από τη γραμματεία της κλασικής αρχαιότητας σε όλες τις επιμέρους κατηγορίες της (ρητορική, ποίηση, ιστοριογραφία κ.λπ.). Κανόνας, ο οποίος ισχύει και για τον τομέα εκείνον του επιστητού, στον οποίον είναι αφιερωμένο το σημερινό μας τεύχος: τη διδασκαλία των μαθηματικών της αρχαιότητας. Μια κεντρική θέση στη συνάφεια αυτή κατέχει, χωρίς αμφιβολία, ένας Βυζαντινός μας πρόγονος, ο Λέων, που παραδίδεται από τις ιστορικές πηγές με το προσωνύμιο «μαθηματικός».

Τα λίγα βιογραφικά στοιχεία που μπορούμε να αντλήσουμε από τις πηγές για τον Λέοντα (που γεννήθηκε κάπου μέσα στην τελευταία δεκαετία του όγδοου αιώνα και πέθανε λίγο μετά το 869) συνθέτουν την εικόνα ενός αρχαιόφιλου ερευνητή, που συλλέγει με πάθος χειρόγραφα και μελετά τους αρχαίους και Αλεξανδρινούς μαθηματικούς. Αφιερωμένος στην έρευνα αλλά και τη διδασκαλία (κατά τα τελευταία χρόνια του βίου του διατέλεσε καθηγητής στη μεγάλη σχολή της Μαγναύρας της Κωνσταντινούπολης), δεν φαίνεται να ενδιαφέρθηκε ο Λέων στα σοβαρά για τη μεγάλη πνευματική διαμάχη, την Εικονομαχία, που χαρακτηρίζει την εποχή του. Ετσι, μολονότι τυπικά ανήκε στη μερίδα των Εικονομάχων, δεν θα διστάσει, κατά τη διάρκεια της σύντομης αρχιερατείας του ως μητροπολίτης Θεσσαλονίκης, να εκφωνήσει, από τον άμβωνα της εκκλησίας της Αχειροποιήτου κατά την ημέρα του Ευαγγελισμού της Θεοτόκου του έτους 842, μια ομιλία που θα έχει κεντρικό σημείο την ορθόδοξη περί εικόνας ομολογία. Η απόλυτη εξοικείωση με τη μαθηματική θεωρία της αρχαιότητας είναι το χαρακτηριστικό εκείνο που καθιστά τον Λέοντα ως έναν από τους πιο πρώιμους εκπρόσωπους του επιστημονικού στοχασμού κατά το Μεσαίωνα. Ο

Λέων είναι εκείνος ο οποίος θα ανασύρει κυριολεκτικά από τη λήθη πέντε ολόκληρων αιώνων την αλγεβρική θεωρία των Αλεξανδρινών μαθηματικών, αποκαθιστώντας έτσι τη συνέχεια στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. Σκαπανέας της επιστημονικής θεώρησης, θα χρησιμοποιήσει, πρώτος αυτός στο Μεσαίωνα, τα γράμματα του αλφαβήτου για την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων, αλλά και για να διατυπώσει θεμελιώδη αξιώματα της γεωμετρίας, εφαρμόζοντας το συμβολισμό των γεωμετρικών ειδών (τα σημεία, τις ευθείες και τα επίπεδα) από τα γράμματα του αλφαβήτου.

Η συμβολή του Λέοντα στη διάσωση της χειρόγραφης παράδοσης των έργων του Ευκλείδη τεκμηριώνεται αδιαμφισβήτητα από το αρχαιότερο χειρόγραφο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη που σώζεται σήμερα. Πρόκειται για το χειρόγραφο που έγινε το Σεπτέμβριο του έτους 888 στο αντιγραφικό εργαστήριο (scriptorium) του λογίου επισκόπου Καισαρείας Αρέθα (που ήταν και μαθητής του Λέοντα στη σχολή της Μαγναύρας). Το χειρόγραφο αυτό περιλαμβάνει (στο φύλλο 120) ένα σχόλιο του Λέοντα στο έκτο βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδη που αναφέρεται στην πρόσθεση και την αφαίρεση των κλασμάτων. Το σχόλιο αυτό αποτελεί (όπως διαπιστώνει ο Ρώσος ιστορικός της μαθηματικής επιστήμης Jushkevich) ένα σημαντικό βήμα προόδου στην εξέλιξη του αλγεβρικού τομέα των μαθηματικών, καθιστώντας την περίπλοκη διδασκαλία των Αλεξανδρινών μαθηματικών του 3ου μ.Χ. αιώνα (ιδιαίτερα του Διόφαντου) πιο εύληπτη.

Όπως τεκμηριώνουν οι πηγές, η συμβολή στην εξέλιξη της άλγεβρας και οι καρποί της μελέτης του Λέοντα του Μαθηματικού θα γίνουν κτήμα, στις αρχές της τρίτης δεκαετίας του 9ου αιώνα, των Αράβων μαθηματικών στο χαλιφάτο της Βαγδάτης και θα αποτελέσουν τις απαρχές της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης κατά τα τέλη του 16ου-αρχές του 17ου αιώνα.

Τ

α μαθηματικά ήταν η πρώτη επιστήμη που διακρίθηκε αποκτώντας αυτοτέλεια, όταν οι υπόλοιπες (φυσική, χημεία, φυσιολογία κ.λπ.) έμεναν για αρκετούς αιώνες στον ευρύ «χώρο» της φιλοσοφίας.

Τα μαθηματικά βρήκαν τη μέθοδό τους νωρίς και χειραφετήθηκαν, υπηρετώντας θεωρητικές και συνάμα αμεσότερες και πρακτικότερες ανάγκες. Ο μέγας μαθηματικός Αρχιμήδης, λ.χ., εφαρμόζοντας τη μαθηματική του ανάλυση στη μηχανική και τη φυσική, έκαιγε με κάτοπτρα τα πλοία του εχθρού.

Όταν γύρω στον 6ο αι. π.Χ. οι ιωνικές πολιτείες της Μ. Ασίας αποκτούν εμπόριο, ναυτιλία, βιοτεχνία και Δήμο, περιορίζουν προοδευτικά και απωθούν τις μυθικές και θρησκευτικές ερμηνείες που προϋπήρχαν για την κατασκευή και τη λειτουργία του κόσμου. Απογυμνώνουν τον κόσμο από το μύθο, τη μαγεία και τη θεότητα, σχηματίζοντας μια γενική ιδέα εντελώς διαφορετική. Ο κόσμος πλέον γι' αυτούς δεν είναι γένεσις (όπως η εβραϊκή «και είπεν ο Θεός γεννηθήτω φως... και είπεν ο Θεός γεννηθήτω στερέωμα... κ.λπ.» ή *natura* απ' το *nasco*= γεννώ των Λατίνων ή «νέπσερ» *nature* αγγλ. απ' τη *natura*), αλλά «φύσις», κάτι δηλαδή που δεν είναι τελειωμένο, επειδή φύεται και βλασταίνει εις το διηνεκές.

Και η ιωνική πρώτη επιστήμη, απ' την οποία πρώτα ξεχώρισαν τα μαθηματικά, ήταν η φυσική ή περί φύσεως.

Ο Θαλής ο Μιλήσιος (624-546 π.Χ.), σύγχρονος του Σόλωνα και του Κροίσου, δεν μέτρησε μόνο το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα από τη σκιά του ραβδιού του, αποδεικνύοντας ότι τον ίδιο λόγο είχε η σκιά της πυραμίδας προς τη σκιά της ράβδου και το ύψος της πυραμίδας προς το μήκος της ράβδου, αλλά έκανε κάτι σπουδαιότερο: επινόησε την απόδειξη στα μαθηματικά.

«Η επινόηση της απόδειξης στα Μαθηματικά –σύμφωνα με τον Σπανδάγο– αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία θεμελιώνεται η ίδρυση της Μαθηματικής Επιστήμης» (Ε. Σπανδάγου, *Τα Μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων*, Αίθρα, σ. 44).

Στο Δήμο της Ιωνίας, που ανακαλύπτει νωρίς τη Δημοκρατία, το οτιδήποτε –και τα μαθηματικά– δεν είναι υπόθεση λιγοστών ιερέων, αλλά όλων των πολιτών. Και η απόδειξη και η μαθηματική απόδειξη, στην οποία στηρίζεται η νέα επιστήμη, είναι απαίτηση των πολλών, της πλειοψηφίας, της Δημοκρατίας. Στα θεοκρατικά δυναστικά καθεστώτα αντιθέτως δεν υπάρχει απόδειξη. Εκεί τα πάντα είναι θέσφατα και γι' αυτή την αιτία ούτε στους Αιγύπτιους ούτε στους Βαβυλώνιους θα βρει κάποιος την ύπαρξη της μαθηματικής απόδειξης. Ετσι, από τους μεγάλους πολιτισμούς της αρχαιότητας (Βαβυλωνία, Αίγυπτος, Περσία, Ρώμη) κανένας άλλος εκτός από τους Έλληνες δεν προχώρησε πέρα από το επίπεδο της στοιχειώδους αριθμητικής και της μέτρησης. Μετά τον Θαλή, ο Αναξίμανδρος (610-547 π.Χ.) επινοεί την έννοια του απείρου, που χωρίς αυτή δεν μπορούν να υπάρξουν μαθηματικά. Το άπειρό του το φαντάζεται απεριόριστο, αγέννητο, αόριστο, άφθαρτο, σε αιώνια κίνηση. Με την απόδειξη, την έννοια του απείρου κ.ά. η μαθηματική επιστήμη βρίσκει το δρόμο της.

Σ

της ΜΑΡΩΣ Κ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
δρος Μαθηματικών, δρος Βυζαντινολογίας
Πανεπιστημίου Humboldt, επίκ. καθηγήτριας
Τμήμ. Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

τα όρια του μύθου και της ιστορίας προβάλλει η μορφή του **Πυθαγόρα του Σαμίου**, γιου του **Μνησάρχου** και της **Πυθαίδος**, ο οποίος πιθανότατα έζησε περί το 580-500 π.Χ. Αφού ταξίδεψε στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα, όπου μυήθηκε στα μυστικά των ιερατείων τους, επέστρεψε στη Σάμο. Μην υπομένοντας όμως την τυραννία του **Πολυκράτους**, έφυγε και εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας, όπου ίδρυσε την περίφημη σχολή του, στην οποία κατόπιν αυστηράς επιλογής γίνονταν δεκτοί ως μαθητές άνδρες και γυναίκες. Κατά τον **Ιάμβλιο** (*Βίος Πυθαγ.*, 267) οι μαθητές διακρίνονταν σε «μαθηματικούς», οι οποίοι είχαν μάθει επακριβώς την επιστημονική διδασκαλία του, και σε «ακουσματικούς», οι οποίοι απλώς είχαν ακούσει χωρίς ακρίβεια και λεπτομέρειες τα βασικότερα σημεία της διδασκαλίας.

Το τέλος της σχολής εσήμανε όταν άρχισε η καταδίωξη των Πυθαγορείων από τον **Κύλωνα**, ο οποίος δεν έγινε δεκτός ως μαθητής λόγω του κακού χαρακτήρα του. Γέρων ο Πυθαγόρας αναγκάστηκε να φύγει στο Μεταπόντιο· οι μαθητές του όμως περικυκλώθηκαν στην οικία του **Μίλωνος** από τον Κύλωνα και τους οπαδούς του, οι οποίοι πυρπόλησαν την οικία και τους κατέκαυσαν. Διέφυγαν μόνον ο **Αρχιππος** και ο **Λύσις**, που ήσαν νέοι και εύρωστοι.

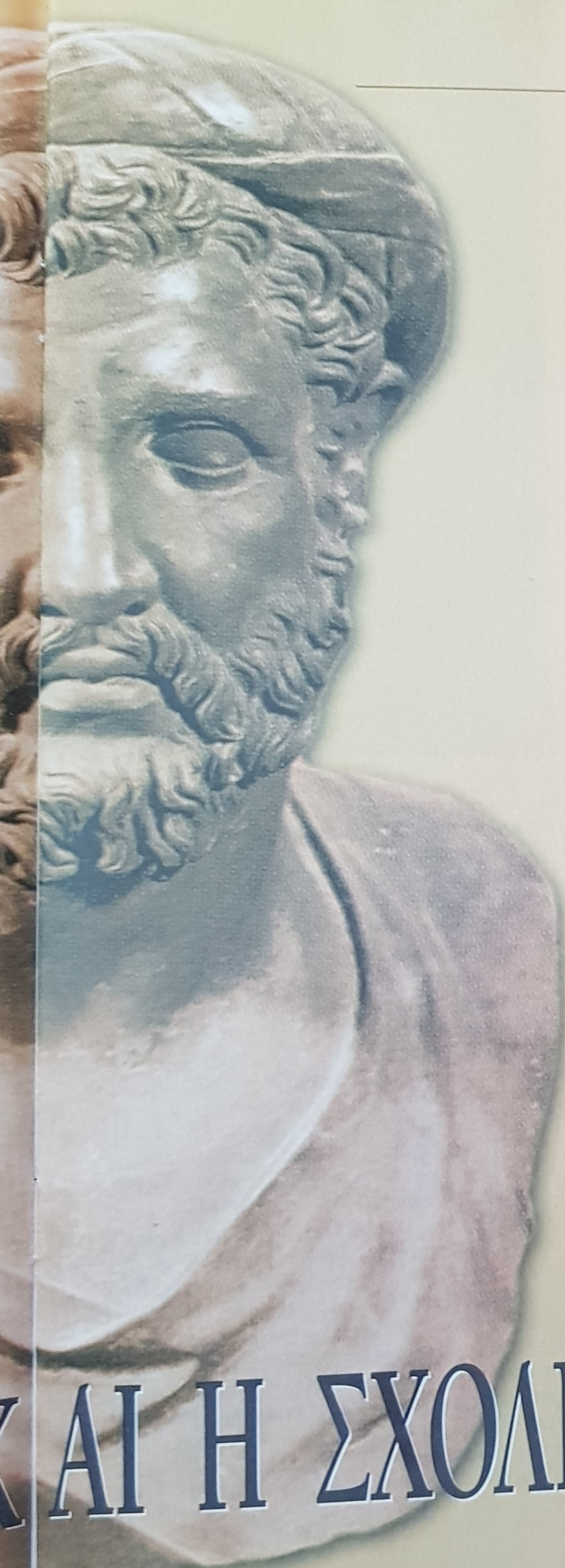
Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Η συμβολή του Πυθαγόρα και των μαθητών του υπήρξε καθοριστική για την ανάπτυξη των μαθηματικών, της μουσικής και της αστρονομίας. Ο **Πρόκλος** στα *Σχόλια εις Ευκλείδη* αποδίδει στον Πυθαγόρα την αναγωγή της γεωμετρίας από εμπειρική γνώση σε θεωρητική επιστήμη· λέγει ότι αυτός τη μετέτρεψε σε σχήμα ελεύθερης παιδείας, εξετάζοντας τις αρχές της άνωθεν και διερευνώμενος τα θεωρήματά της αὐλως και νοερώς. Δηλαδή, με τον Πυθαγόρα αρχίζει η διαμόρφωση του θεωρητικού πλαισίου της γεωμετρίας, το οποίο λαμβάνει την τελική μορφή του στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Ο απαγχονισμός
του τυράννου της
Σάμου Πολυκράτη
σε γαλλική
εικονογράφηση
του 1415



Ο ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Κ



Νόμισμα των Σαμίων με τη μορφή του Πυθαγόρα. Στη μέση: Πυθαγόρας ο Σάμιος, θεμελιωτής των επιστημών των μαθηματικών και της αστρονομίας. Ρωμαϊκό αντίγραφο χάλκινης προτομής (Αρχαιολογικό Μουσείο Νάπολης)

Μολονότι ο ίδιος δεν άφησε συγγράμματα, του αποδίδονται ορισμένες σημαντικές ανακαλύψεις. Πρώτη απ' όλες το γνωστό μας «Πυθαγόρειο θεώρημα»: σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του ισούται με το τετράγωνο της υποτεινούσας του. Το γεγονός ότι σε βαβυλωνιακά αρχεία αναγνωρίστηκαν τριάδες αριθμών που ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα, δεν σημαίνει ότι οι Βαβυλώνιοι το γνώριζαν. Ο Πυθαγόρας πρώτος διατύπωσε ως γενικό θεώρημα και απέδειξε αυστηρώς ότι αυτή η σχέση ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ανεξαρτήτως του είδους του και των μηκών των πλευρών του.

Η φύση του αριθμού

Καθοριστική για τη θεμελίωση και την εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών είναι η δεσπόζουσα θέση την οποία κατέχει ο αριθμός στην πυθαγόρεια φιλοσοφία. Κατά τον **Αριστοτέλη** (*Μετά τα φυσικά* Α5), οι Πυθαγόρειοι έβλεπαν πολλά γεγονότα στον κόσμο να μοιάζουν στους αριθμούς, τους λόγους και τις αναλογίες τους, και γενικώς τα «πάθη» τους. Κατέληξαν, λοιπόν, ότι τα στοιχεία των αριθμών είναι και στοιχεία των όντων και ότι ο ουρανός ολόκληρος, δηλαδή ο κόσμος, είναι αρμονία και αριθμός. Στοιχεία του αριθμού θεωρούσαν το περιττό, που αντιστοιχούσε στο πεπερασμένο, και το άρτιο που αντιστοιχούσε στο άπειρο.

Κατά τον **Διογένη Λαέρτιο**, ο Πυθαγόρας θεωρούσε ως πρώτη αρχή του κόσμου τη «μονάδα», από την οποία απορρέει η «αόριστος δυάς»: από αυτές παράγονται οι αριθμοί· από τους αριθμούς τα σημεία· από τα σημεία οι γραμμές· από τις γραμμές τα επίπεδα σχήματα· από τα επίπεδα γίνονται τα στερεά σχήματα και, τέλος, τα αισθητά (δηλαδή, ►

ΚΑΙ Η ΣΧΟΛΗ ΤΟΥ

Ο Πυθαγόρας σε λεπτομέρεια από αναγεννησιακό πίνακα. Κάτω, ο Πυθαγόρας σε πέτρινο ανάγλυφο του 12ου αιώνα από τον καθεδρικό ναό του Καρθς

αυτά που υποπίπτουν στις αισθήσεις μας).

Στο έργο του *Περί φύσιος* ο Φιλόλαος ο Κροτωνιάτης λέει σαφώς ότι «όσα είναι δυνατόν να γνωσθούν έχουν αριθμόν· διότι τίποτα δεν είναι δυνατόν να νοηθεί ούτε να γνωσθεί χωρίς αυτόν» (και πάντα γα τα γιγνωσκόμενα αριθμόν έχοντι· ου γαρ οίον τε ουδέν ούτε νοηθήμεν ούτε γνωσθήμεν άνευ τούτου). Τούτο σημαίνει ότι προϋπόθεση για την κατανόηση ενός πράγματος είναι η δυνατότητα διατυπώσεώς του σε αριθμητική γλώσσα· διότι, για να το γνωρίσουμε επακριβώς, απαιτείται η διερεύνηση των ιδιοτήτων του μέσω των ιδιοτήτων των αριθμών. Αρα, ό,τι δεν μπορεί να διατυπωθεί σε μαθηματική γλώσσα είναι σαν να μην υπάρχει! Αντιθέτως, η γνώση μας για τα διάφορα πράγματα και την ουσία τους, την οποία αποκομίζουμε μέσω της μελέτης (των λόγων) των αριθμών τους, είναι αληθής και ακριβής, αφού κατά τον Φιλόλαο «η φύση του αριθμού δεν επιδέχεται κανένα ψεύδος». Η

Οι μαθητές του Πυθαγόρα διακρίνονταν σε «μαθηματικούς» που γνώριζαν τη διδασκαλία και σε «ακουσματικούς» που την είχαν ακούσει

αναφορά του στη «δύναμη της φύσεως του αριθμού κατά πάντα στα έργα και τα λόγια των ανθρώπων, σε όλες τις τεχνικές δημιουργίες και τη μουσική», τονίζει και επιβεβαιώνει τη σπουδαιότητα της ευρέσεως των αριθμών και της συμβολής τους στην εξέλιξη του πολιτισμού. Είναι μία από τις προσφορές του Προμηθέως-χρόνου ευεργέτου προς το ανθρώπινο γένος (και μην αριθμόν, έξοχον σοφισμάτων, εξηνύρον αυτοίς... Αισχ. Προμ., στ. 459-60).

Σύνθεση των αντιθέτων

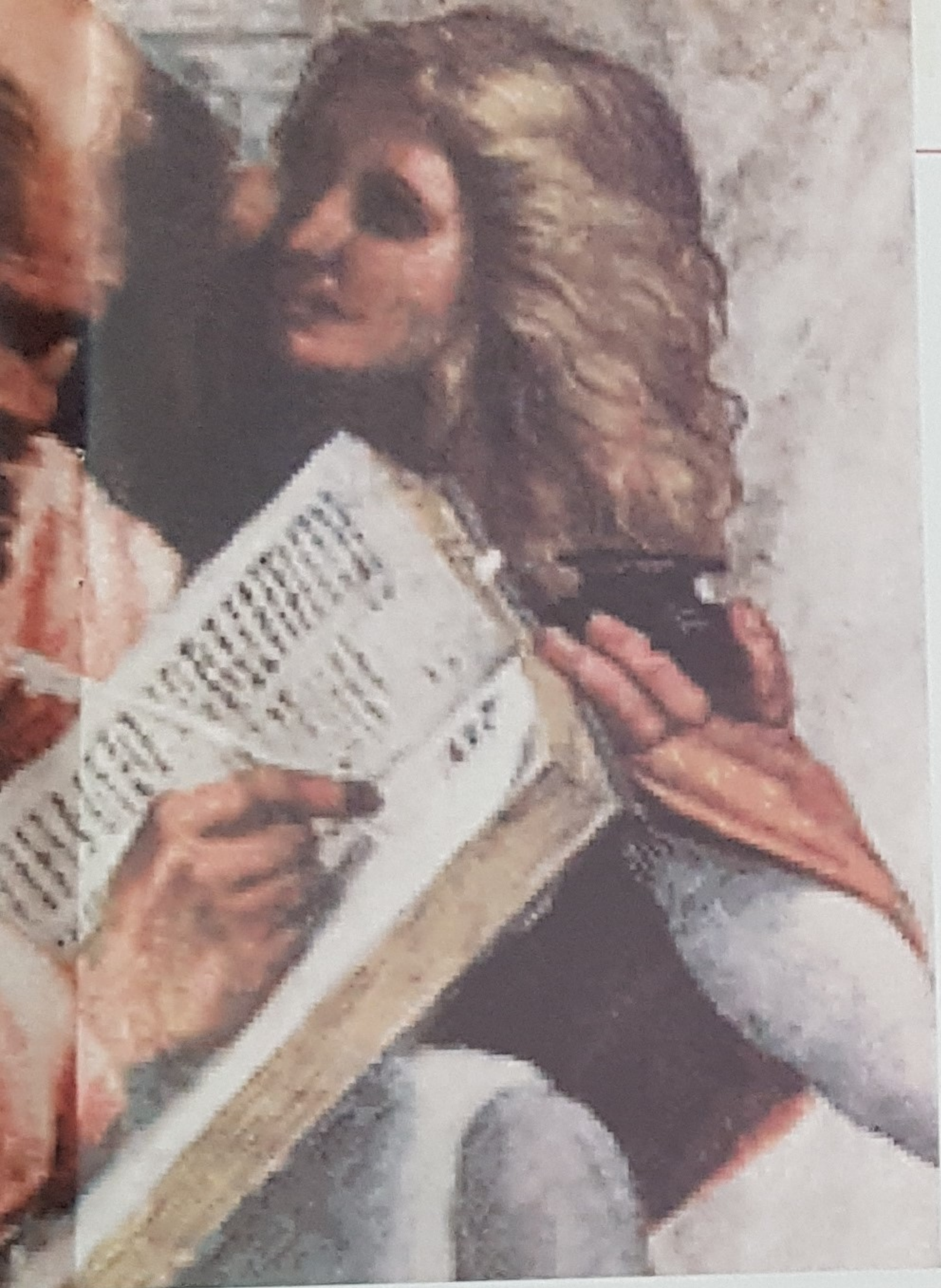
Η άποψη του Φιλολάου, ότι «η φύση στον κόσμο έχει αρμοσθεί από άπειρα και πεπερασμένα» (α φύσις εν τω κόσμω αρμόχθη εξ απείρων τε και περαινότων) σημαίνει ότι αυτή αποτελεί σύνθεση των αντιθέτων. Τούτο γίνεται καλύτερα κατανοητό από την αναφορά του Αριστοτέλους

στις δέκα αρχές «κατά συστοιχίαν», οι οποίες αποδίδονταν στους Πυθαγορείους:

- πέρας και άπειρον
- περιπτόν και άρτιον
- εν και πλήθος
- δεξιόν και αριστερόν
- άρρεν και θήλυ
- ηρεμούν και κινούμενον
- ευθύ και καμπύλον
- φως και σκότος
- αγαθόν και κακόν
- τετράγωνον και ετερόμηκες

Η συνύπαρξη των αντιθέτων δημιουργεί την κοσμική αρμονία, η οποία κατά τον Φιλόλαο είναι «πολυμιγέων ένωσις και δίχα φρονεόντων συμφρόνησις». Επομένως, η αρμονία είναι αναγκαία για να συγκλείει τα «ανόμοια, ετερόφυλα και μη ισοταγή» στον κόσμο. Πρόκειται λοιπόν για μια δυναστική άποψη περί του κόσμου, με διαχρονικές επιπτώσεις στις φιλοσοφικές και θεολογικές αντιλήψεις μας. Τούτο φαίνεται και από τις πληροφορίες του **Ιωάννη Στοβαίου**, ότι ο Πυθαγόρας δίδασκε ότι η μονάς είναι ο θεός και το αγαθό, αντιστοιχεί δε στο ποιητικό αίτιο και το ειδικό, το οποίο είναι ο νους· ενώ η αόριστος δυάς είναι ο δαίμων και το κακό, αντιστοιχεί δε στο παθητικό και το υλικό αίτιο, το οποίο





είναι ο ορατός κόσμος. Θεωρούσε ακόμη ότι ο κόσμος είναι γεννητός «κατ' επινόειαν» (κατά σχέδιο) κι όχι κατά χρόνον.

Η τετρακτύς

Στο *Περί φύσιος* έργο του ο Φιλόλαος λέει ότι «η δύναμη της δεκάδος είναι μεγάλη και τέλεια και παντουργός αρχή και του θείου και του ανθρωπίνου βίου... χωρίς αυτήν, δε, τα πάντα θα ήσαν άπειρα και άδηλα και αφανή» (μεγάλα γαρ και παντελής και παντοεργός και θείω και ουρανίω βίω και ανθρωπίνω αρχά... δύνამις και τας δεκάδος άνευ δε τούτας πάντ' άπειρα και άδηλα και αφανή). Ο Αριστοτέλης επιβεβαιώνει ότι οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τέλεια τη δεκάδα και μάλιστα ότι αυτή έχει συμπεριλάβει τη φύση των αριθμών. Επειδή όμως η τελειότητα είναι ιδιότητα του θείου, η δεκάδα καθίσταται ιερή. Ετσι εξηγείται, γιατί ο ύψιστος όρκος τηρήσεως μυστικότητας για τις διδασκαλίες της σχολής τους από του Πυθαγορείους:

Ου μα τον αματέρα γενεά (ή ψυχά) παραδόντα τετρακτύν,

παγάν αενάου φύσεως ριζώματ' έχουσαν [όχι, δεν θα μαρτυρήσω· μα τον παραδώσαντα στη γενεά (ή ψυχή) μας την τετρακτύν, πηγήν αενάου φύσεως έχουσαν βαθιές ρίζες], αναφέρεται στην ιερή δεκάδα, η οποία προκύπτει ως άθροισμα των τεσσάρων πρώτων διαδοχικών αριθμών: $1+2+3+4=10$. Ο Αέτιος σωστά επισημαίνει ότι τούτο σχετίζε-

ται με το δεκαδικό σύστημα αριθμήσεως, το οποίο χρησιμοποιούν και οι Έλληνες και οι Βάρβαροι. Κατά τον Πλούταρχο (Ηθικά 381F) υπήρχε και μεγάλη τετρακτύς, ο αριθμός 36, ο οποίος προκύπτει ως άθροισμα των τεσσάρων πρώτων περιπτών και αρτίων αριθμών, ήτοι: $(1+3+5+7)+(2+4+6+8)=36$.

Η ιερή δεκάδα υπεισέρχεται και στη δομή του κόσμου. Στο Φιλολάειο σύστημα δέκα τροχιές γύρω από το κεντρικό πυρ διαγράφουν τα ουράνια σώματα, ήτοι η αντίχθων, η γη, η σελήνη, ο ήλιος, οι πέντε πλανήτες και η σφαίρα των απλανών αστερών.

Η θεωρία αριθμών

Οι Πυθαγόρειοι, με τις συστηματικές έρευνές τους για τις ιδιότητες των αριθμών, έθεσαν τις βάσεις της Θεωρίας αριθμών. Την αριθμοθεωρία τους διασώζει ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* του (βιβλία Ζ, Η, Θ). Π.χ. είναι βέβαιο ότι γνώριζαν τα εξής τρία βασικά θεωρήματα: ότι το άθροισμα δύο αρτίων αριθμών είναι άρτιος αριθμός· ότι το γινόμενο δύο

Κάτω, ο Πυθαγόρας κάνει το πείραμα με την παραγωγή αρμονικών ήχων. Δίπλα του με αυλό ο Φιλόλαος. Λεπτομέρεια από το βιβλίο (15ος αιώνας) «Θεωρία της Μουσικής» του Franchinus Gafurius

Η συμβολή του Πυθαγόρα και των μαθητών του υπήρξε καθοριστική για την ανάπτυξη των μαθηματικών, της μουσικής, της αστρονομίας

περιπτών αριθμών είναι περιπτός αριθμός· και ότι εάν ένας περιπτός αριθμός διαιρεί έναν άρτιο, τότε διαιρεί και το ήμισύ του. Αναζητούσαν επίσης ειδικές περιπτώσεις αριθμών, βάσει των σχέσεων των διαιρετών τους. Ετσι ονόμαζαν «φίλους» τα ζεύγη αριθμών, όπου καθένας ισούται με το άθροισμα των



γνησίων διαιρετών του άλλου· παράδειγμα φίλων αριθμών είναι οι 220 και 284. «Τέλειον» αριθμό καλούσαν εκείνον ο οποίος ισούται με το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του: παράδειγμα ο 6, διότι οι γνήσιοι διαιρέτες του 3, 2, 1 έχουν άθροισμα $3+2+1=6$. Η έρευνα των τελείων αριθμών, οι οποίοι είναι εξαιρετικά σπάνιοι, συνεχίζεται έως σήμερα. Πέραν αυτών, οι Πυθαγόρειοι παρίσταναν ορισμένους αριθμούς με κανονικά πολύγωνα. Ετσι είχαν αριθμούς τριγώνους (π.χ. 1, 3, 6), τετράγωνους (π.χ. 1, 4, 9), πεντάγωνους (π.χ. 1, 5, 12). κ.λπ.

Τα κοσμικά σώματα (στερεά)

Στον Πυθαγόρα αποδίδονται επίσης η κατασκευή ενός ορθογωνίου τριγώνου με βάση ένα περιττό αριθμό· η κατασκευή ενός σχήματος, το οποίο να είναι μεν όμοιο προς ένα από δύο δοθέντα σχήματα, ίσο δε προς το άλλο· και τέλος η κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων (τετράεδρο, κύβος, ο-

Η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών (ή ασύμμετρων μεγεθών) επέφερε ισχυρότατο κλονισμό στην κοσμολογία των Πυθαγορείων

κτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο), τα οποία είναι τα μόνο εγγράψιμα σε σφαίρα. Θεωρούσε, μάλιστα, ότι από αυτά έγιναν τα πρώτα στοιχεία του κόσμου κατά την αντιστοιχία: τετράεδρο-πυρ, κύβος-γη, οκτάεδρο-αήρ, εικοσάεδρο-ύδωρ, δωδεκάεδρο-σφαίρα του παντός· και ότι από τους μετασχηματισμούς τους έγινε ο κόσμος. Την ιδέα αυτή ανέπτυξε αργότερα ο Πλάτων στον *Τίμαιό* του· έκτισε τα κανονικά πολύεδρα είναι γνωστά ως «πλατωνικά στερεά». Το σημαίνοντα ρόλο τους στην ελληνική φιλοσοφία και την επιστήμη αποδεικνύει το γεγονός ότι περιεχόμενο του ΙΓ' βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη είναι η μελέτη τους, η οποία καταλήγει στις σχέσεις μεταξύ της ακτίνας της περιγεγραμμένης σφαίρας και της ακμής του πολυέδρου σε κάθε περίπτωση.

Οι άρρητοι αριθμοί

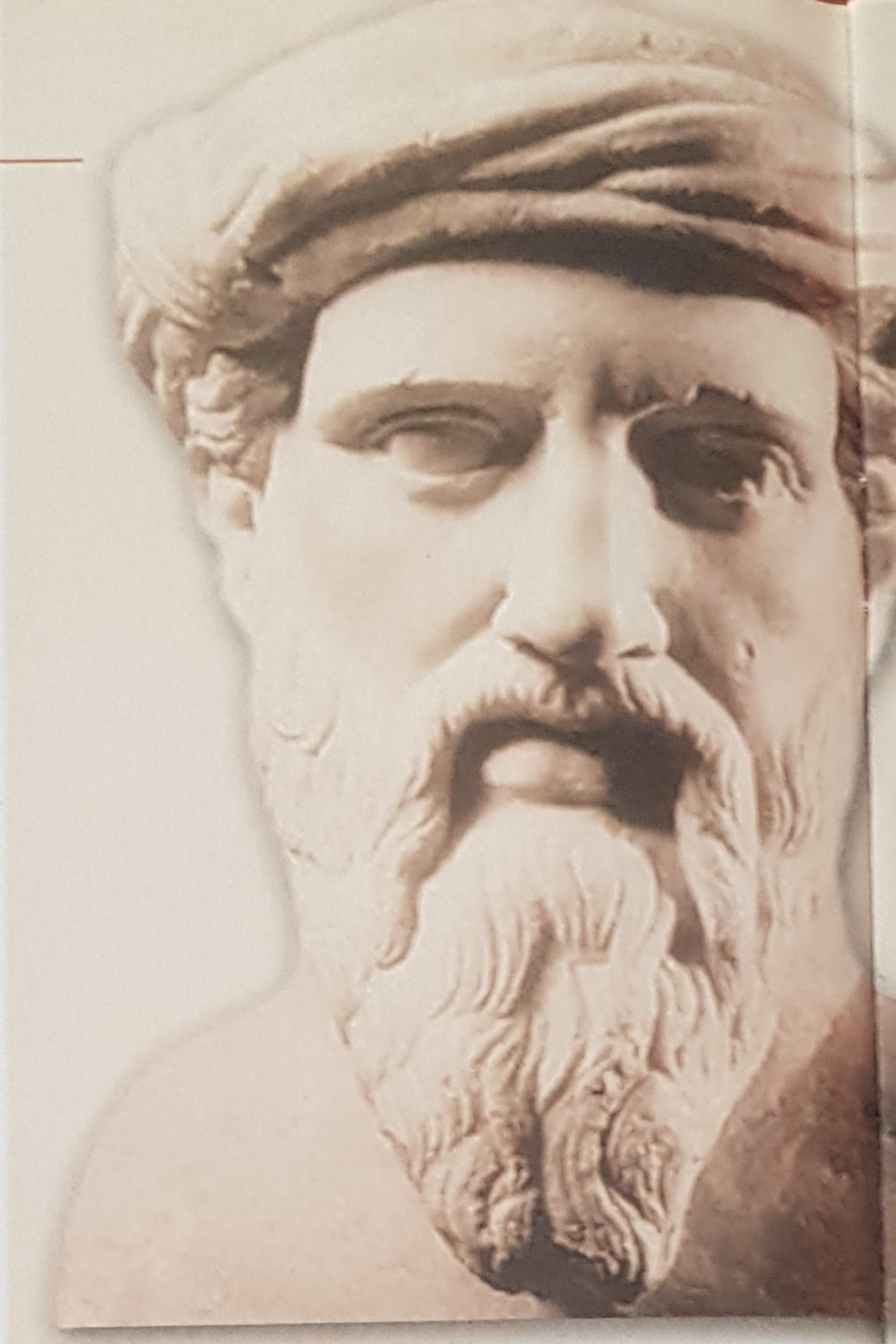
Το δωδεκάεδρο έχει συνδεθεί με τον **Ιππασο τον Μεταποντίνο**, ο οποίος λέγεται ότι αποκάλυψε το θεώρημα της εγγραφής του σε σφαίρα, για να σφετερισθεί τη δόξα της ανακαλύψεως αντί του Πυθαγόρα. Γι' αυτή την ασέβεια πνίγηκε τελικώς στη θάλασσα. Κατ' άλλους αποκάλυψε την ύπαρξη των άρρητων αριθμών, στην οποία έφθασε ο Πυθαγόρας εφαρμόζοντας το θεώρημά του στην περίπτωση ενός τετραγώνου. Δηλαδή, η διαγώνιος ενός τετραγώνου το διαιρεί σε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα. Βάσει του Πυθαγορείου θεωρήματος, το τετράγωνο της

διαγωνίου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς. Αν η πλευρά ισούται με τη μονάδα, τότε το τετράγωνο της διαγωνίου ισούται με 2. Άρα, η διαγώνιος πρέπει να ισούται με έναν αριθμό, ο οποίος υψούμενος στο τετράγωνο δίνει 2. Στην αρχαιότητα δεν υπήρχε τρόπος να υπολογισθεί και να διατυπωθεί ένας τέτοιος αριθμός· δηλαδή, ήταν «άρρητος» αριθμητικώς. Πρόκειται για τον αριθμό, τον οποίο εμείς σήμερα συμβολίζουμε με $\sqrt{2}$. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν γενικώς όλοι οι αριθμοί που δεν είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου αριθμού.

Η ανακάλυψη των άρρητων αριθμών (ή ασύμμετρων μεγεθών) –μία από τις μεγαλύτερες στην ιστορία των μαθηματικών– επέφερε ισχυρότατο κλονισμό στην κοσμολογία των Πυθαγορείων, η οποία βασίζονταν στους φυσικούς αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Απόηχός τους είναι η θλιβερή ιστορία του Ιππασού.

Η μουσική κλίμακα

Για την ανακάλυψη και τη διαμόρφωση της μουσικής κλίμακας από τον Πυθαγόρα ο **Ιάμβλιχος** διασώζει την εξής ιστορία: Περνώντας κάποτε έξω από ένα χαλκουργείο, ο Πυθαγόρας άκουσε συμφώνους ήχους, καθώς τα σφυριά χτυπούσαν επάνω στον άκμονα. Μπήκε μέσα και πειραματιζόμενος ανακάλυψε ότι η διαφορά των ήχων ήταν ανεξάρ-





Η μορφή του Πυθαγόρα
από προτομή και νόμισμα
της ρωμαϊκής περιόδου

την από τη δύναμη των κτυπημάτων και το σχήμα των σφυριών. Κατασκεύασε λοιπόν τέσσερις χορδές από το ίδιο υλικό, ισομεγέθεις, ισοπαχείς και ομαλώς στριμμένες· τις στερέωσε άνω κατά το ένα άκρο τους και έδεσε βάρη στο ελεύθερο κάτω άκρο, διατηρώντας ίσα τα μήκη τους. Κατόπιν, κρούοντας τις χορδές ανά δύο εύρισκε τις συμφωνίες των ήχων· έτσι ανακάλυψε τη μουσική κλίμακα.

Κατ' άλλους ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι η συμφωνία των ήχων προερχόταν από τα βάρη των σφυριών, τα οποία ήσαν ανάλογα των αριθμών 12, 9, 8

και 6 και έδιναν τα διαστήματα τετάρτης, πέμπτης και διαπασών. Πειραματιζόμενος ανακάλυψε τη σχέση μεταξύ του μήκους μιας παλλόμενης χορδής και του παραγόμενου από αυτήν τόνου. Εκτοτε η μελέτη της μουσικής έγινε μελέτη των λόγων των διαστημάτων.

Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος στον *Αρμονικό* του αναφέρεται στον τρόπο παραγωγής των ήχων και τις ιδιότητές τους και διατυπώνει την άποψη ότι «οι οξείς ήχοι κινούνται ταχύτερα από τους βαρείς ήχους». Αντιστοίχως σήμερα λέμε ότι οι οξείς ήχοι έχουν μεγάλη συχνότητα και οι βαρείς ήχοι έχουν μικρή συχνότητα. Ο Αρχύτας αναφέρει επίσης ότι τρεις είναι οι μεσοότητες των λόγων στη μουσική: η αριθμητική, η γεωμετρική και η υπεναντία (ή αρμονική) και δίνει τον τρόπο υπολογισμού του αριθμητικού, γεωμετρικού και αρμονικού μέσου δύο δοθέντων αριθμών.

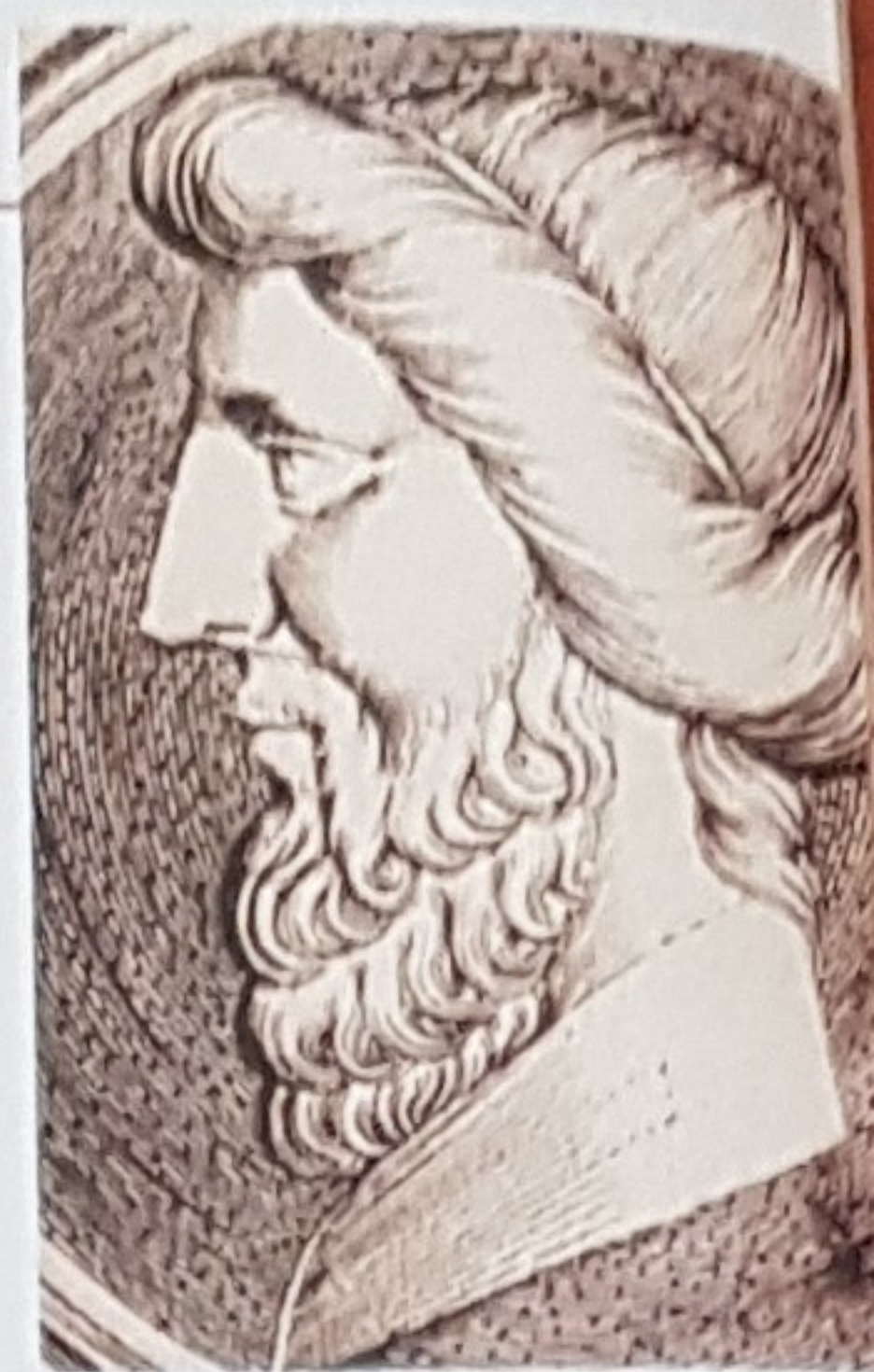
Οι Πυθαγόρειοι, περιγράφοντας τη φύση μέσω των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, έδωσαν τις βάσεις των θετικών επιστημών

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι ο αριθμός 9 είναι ο αριθμητικός μέσος των 6 και 12, ενώ ο 8 είναι ο αρμονικός μέσος των ιδίων αριθμών. Ετσι το εξάεδρο-κύβος (που αντιστοιχεί στη γη) και το δωδεκάεδρο (που αντιστοιχεί στη σφαίρα του παντός) συνδέονται με τον αριθμητικό και τον αρμονικό μέσο τους. Τούτο είναι μια πρώτη ένδειξη ότι το σύμπαν συνδέεται στενά με τον αριθμό και την αρμονία. Επιπλέον οι πλανήτες, κινούμενοι ταχέως, παράγουν ήχους, οι οποίοι δημιουργούν την αρμονία των σφαιρών. Είναι μια κρυφή αρμονία, διότι δεν γίνεται αντιληπτή από τα αυτιά μας, καθώς υπάρχει ως συνεχές ακουστικό υπόβαθρο από τη στιγμή της γεννήσεώς μας. Η Πυθαγόρεια αρμονία των σφαιρών υιοθετήθηκε από τον Πλάτωνα και άσκησε την επίδρασή της έως και τον **Κέπλερ**, δηλαδή επί περίπου δύο χιλιάδες χρόνια.

Γενικώς οι Πυθαγόρειοι με την αντίληψή τους ότι γεωμετρία, αριθμητική, σφαιρική αστρονομία και μουσική είναι «μαθήματα αδελφεία» και την προσπάθειά τους να περιγράψουν τη φύση μέσω των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, έδωσαν τις βάσεις των θετικών επιστημών.

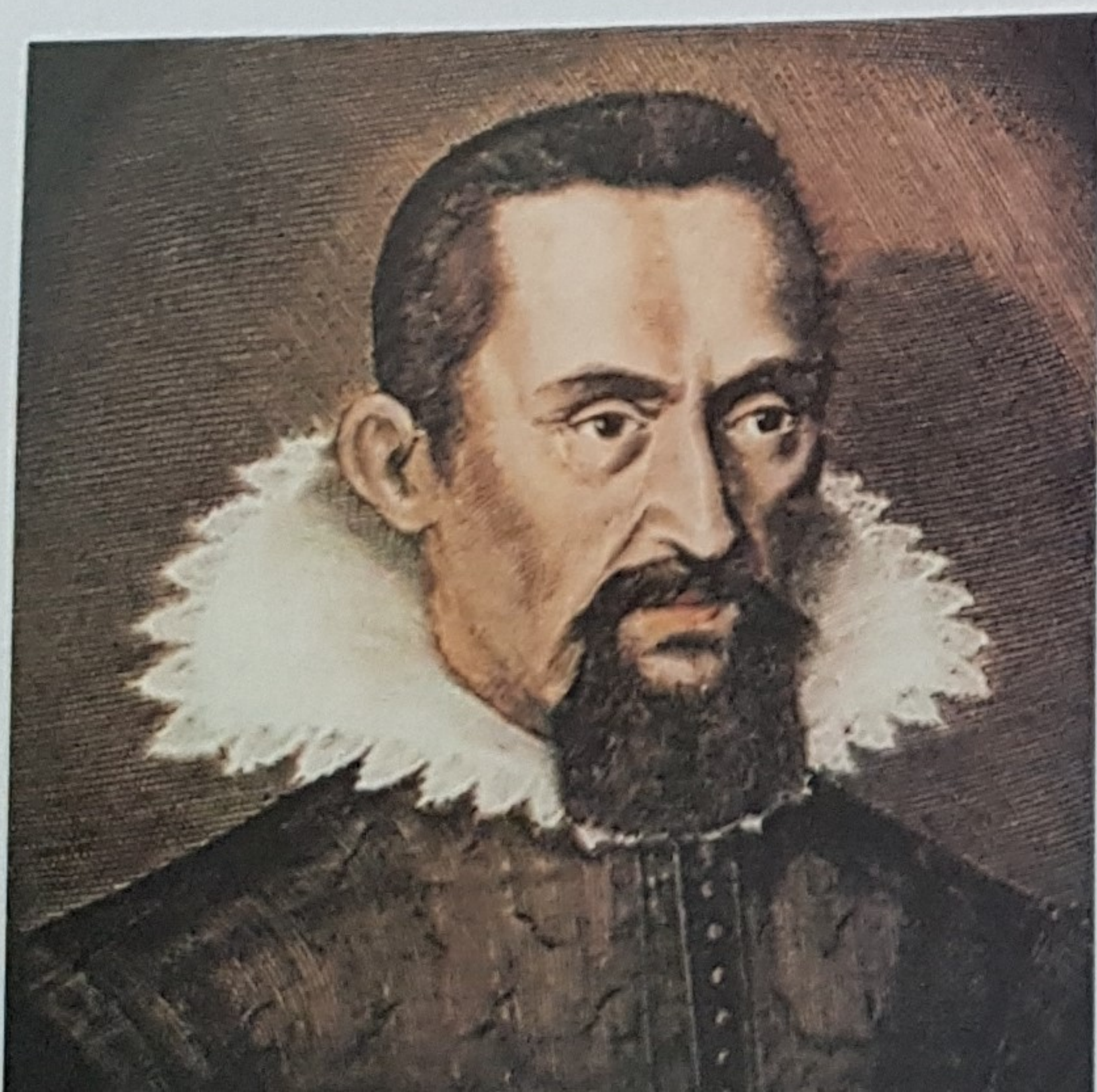
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

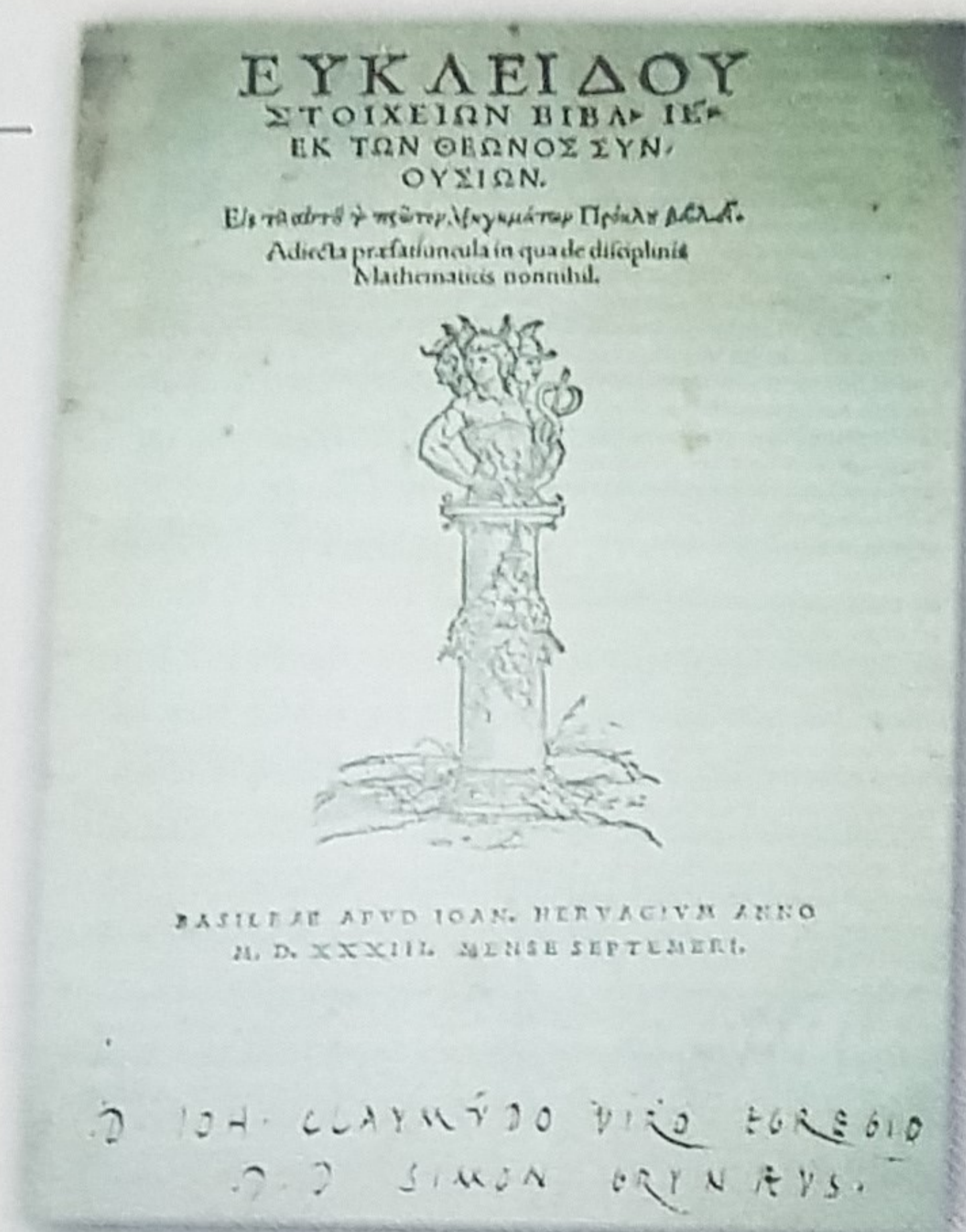
H. Diels-W. Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker* (Τα αποσπάσματα των Προσωκρατικών), 1ος τόμος, 10η έκδ., Weidmann, Berlin 1961.
Ε. Σταμάτη, *Πυθαγόρας ο Σάμιος*, Αθήναι 1981



Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος συμπλήρωσε τη θεωρία του Πυθαγόρα περί αρμονίας (φανταστική γκραβούρα)

Ο Γερμανός αστρονόμος Γιοχάνες Κέπλερ, ιδρυτής της σύγχρονης αστρονομίας. Χαλκογραφία του 1730





Του ΑΝΔΡΕΑ ΠΟΥΛΟΥ
μαθηματικού-συγγραφέα

Ευκλείδης ο Αλεξανδρινός είναι μία από τις σπάνιες περιπτώσεις διανοουμένων στην παγκόσμια ιστορία του πολιτισμού, που ενώ έγινε τόσο διάσημος για το έργο του, για τη ζωή του δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα. Πράγματι, κάθε στοιχειωδώς μορφωμένος άνθρωπος έχει ακούσει για την «Ευκλείδεια γεωμετρία» και εκατομμύρια άνθρωποι έχουν διδαχθεί σε μία χρονική διάρκεια δύο χιλιάδων ετών γεωμετρία σύμφωνα με το Ευκλείδειο αξιωματικό σύστημα. Λέγεται ότι η «Ευκλείδεια γεωμετρία» συγκαταλέγεται ανάμεσα στα έργα της τυπογραφίας με το μεγαλύτερο αριθμό εκδόσεων σε όλες τις γραπτές γλώσσες. Για παράδειγμα, στις αρχές του 19ου αιώνα είχαν καταγραφεί 1.700 εκδόσεις των «Στοιχείων» του Ευκλείδη σε διάστημα χιλίων εννιακοσίων ετών, ενώ σήμερα υπολογίζεται ότι οι εκδόσεις αυτού του έργου έχουν ξεπεράσει τις 1.900. Τα «Στοιχεία», ένα σύνολο δεκατριών βιβλίων, είναι έργο του ίδιου του Ευκλείδη, από τα σημαντικότερα και γνωστότερα της ελληνικής μαθηματικής γραμματείας. Με το έργο αυτό ο δημιουργός του έμεινε αθάνατος, κατέλαβε εξέχουσα θέση στο πάνθεον των

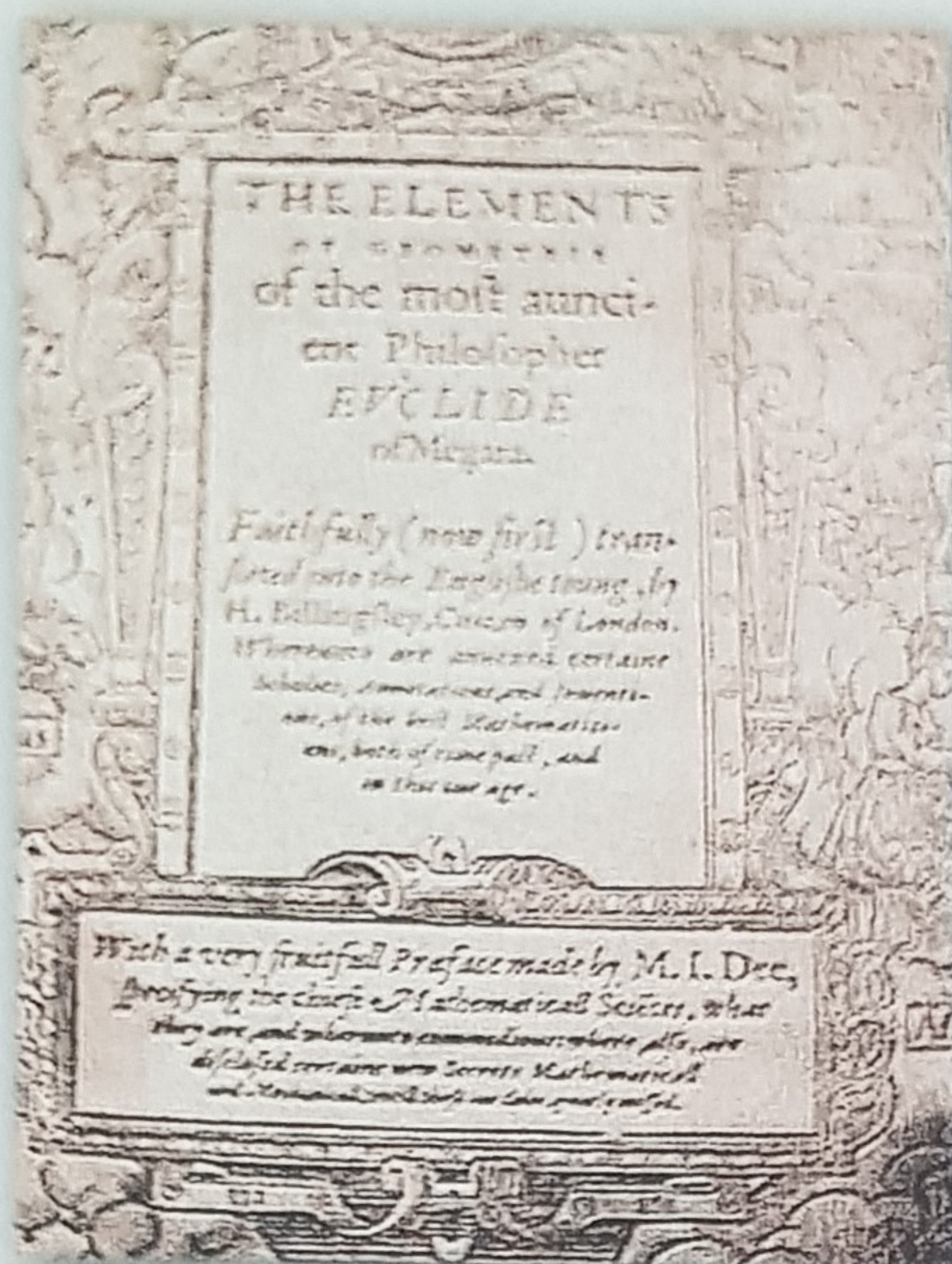


ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Ο ΣΤΟΙ

Στη μέση, ο
Ευκλείδης και οι
μαθητές του σε
λεπτομέρεια
αναγεννησιακού
πίνακα



ΚΕΙΩΤΗΣ



Το βιβλίο που «στοιχειοθέτησε» τη μαθηματική σκέψη, σε δύο από τις 1.900 εκδόσεις του. Στα ελληνικά και λατινικά (στην απέναντι σελίδα), με σχόλια Πρόκλου και στα αγγλικά (δίπλα)

επιστημόνων και τα περίφημα πλέον «Στοιχεία» συγκαταλέγονται μεταξύ των διασημότερων γραπιών μνημείων του ανθρώπινου πολιτισμού.

Είναι πράγματι παράξενο και παραμένει ένα τεράστιο ερωτηματικό ότι γνωρίζουμε τόσα πολλά για το έργο του Ευκλείδη –για την ακρίβεια, για ορισμένα από τα έργα του– ότι αυτό έχει μελετηθεί, σχολιαστεί και διερευνηθεί λεπτομερώς ακόμη και από την αρχαία εποχή, αλλά για τον ίδιο το δημιουργό του ουσιαστικά αγνοούμε σχεδόν τα πάντα. Ούτε για τον τόπο ούτε για το χρόνο της γέννησης και του θανάτου του δεν έχουμε επιβεβαιωμένες πληροφορίες. Ετσι, ο διάσημος Ευκλείδης ίσως παραμένει για πάντα άγνωστος ως προς τον τρόπο που πορεύτηκε στη ζωή του στο σύντομο χρονικό διάστημα που ζουν τα ανθρώπινα πλάσματα, αλλά το έργο του ενδυναμώνει το συμπέρασμα ότι «πραγματικά σπουδαίος είναι ο άνθρωπος που αφήνει πίσω του έργο, ανθεκτικό και σημαντικό και για τους ανθρώπους που θα γεννηθούν 1.000 και 2.000 χρόνια μετά απ' αυτόν».

Είναι επίσης περίεργο ότι η προσωπικότητα του Ευκλείδη, ακόμη και από την αρχαία εποχή, συγχέονταν με αυτήν του **Ευκλείδη από τα Μέγαρα**, ενός μαθητή του **Σωκράτη** και ιδρυτή της Μεγαρικής Φιλοσοφικής Σχολής. Η ίδια σύγχυση μεταφέρεται και πολλούς αιώνες αργότερα. Ετσι, στην έκδοση των «Στοιχείων» του 1482 διαπιστώνουμε ότι ως συγγραφέας αναφέρεται ο Ευκλείδης ο Μεγαρεύς! Πρέπει να σημειώσουμε ότι το όνομα Ευκλείδης ήταν πολύ κοινό κατά την ελληνιστική εποχή και αρκετοί επιστήμονες έφεραν το όνομα αυτό. Σύγχυση υπάρχει και μεταξύ των Αράβων σχολιαστών του Ευκλείδειου έργου ως προς τον τόπο καταγωγής του, για το όνομα του πατέρα του και τους διδασκάλους του. Επαναλαμβάνουμε, λοιπόν, αυτό που αναφέραμε στην αρχή: για τον Ευκλείδη δεν γνωρίζουμε σχεδόν τίποτα. Οι μόνες ουσιώδεις

Ο συνώνυμος του Ευκλείδη, Μεγαρέας, σωκρατικός φιλόσοφος



Ο Ευκλείδης από
λεπτομέρεια
ανγεννησιακού
πίνακα



και ταυτόχρονα έγκυρες πληροφορίες, οι οποίες έχουν διασταυρωθεί από διαφορετικές πηγές, είναι ότι έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, ότι ήταν ελληνικής καταγωγής και ότι η χρονική περίοδος του ώριμου επιστημονικού έργου του είχε μία διάρκεια που θα πρέπει να κυμαίνεται από το 325 έως το 275 πριν από τη χρονολογική μας βάση. Κάποιες άλλες πληροφορίες με μορφή ανεκδότων θα τις παρουσιάσουμε στη συνέχεια, με σκοπό να φωτιστεί καλύτερα το έργο του και, έμμεσα, πλευρές της προσωπικότητας του Ευκλείδη.

Τι ήταν όμως αυτό που έκανε τόσο διάσημα τα «Στοιχεία» και μέσω αυτών και το δημιουργό τους; Έργα με τον ίδιο τίτλο είχαν συγγράψει και διανοούμενοι-φιλόσοφοι πριν από τον Ευκλείδη, όπως ο **Ιπποκράτης ο Χίος** (άκμασε γύρω στο 400 π.Χ.), εφοπλιστής της εποχής του, αλλά με βαθιά επιστημονική κατάρτιση, ο **Λέων** ο μαθητής του **Νεοκλείδου** και ο **Θεύδιος ο Μάγνης** (4ος αιώνας π.Χ.). Τέτοια έργα ήταν ένα είδος συνοπτικής εγκυκλοπαίδειας των μαθηματικών γνώσεων, τα οποία υποθέτουμε –σύμφωνα με τη βοήθεια ορισμένων πληροφοριών που διαθέτουμε– ότι συνόψιζαν τις μαθηματικές γνώσεις της εποχής τους και τις εξέδεται με μία λογική σειρά. Ο Ευκλείδης, όμως, παρουσίασε τα δικά του «Στοιχεία» με τέτοιο τρόπο, που έμεινε ανυπέρβλητος και αποτέλεσε πρότυπο δομημένου ε-

Η «Ευκλείδεια γεωμετρία» συγκαταλέγεται ανάμεσα στα έργα με το μεγαλύτερο αριθμό εκδόσεων σε όλες τις γραπτές γλώσσες

πιστημονικού λόγου. Σε αυτό το έργο ο Ευκλείδης κατάφερε να συνδέσει ένα μεγάλο πλήθος μαθηματικών ανακαλύψεων, που έγιναν σε μία μακρά χρονική διαδρομή, με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μία από αυτές να προκύπτει από τις προηγούμενες με λογικά συνεπή τρόπο, με αιτιολογημένο επιστημονικά λόγο και συλλογισμούς, οι οποίοι να μην αφήνουν λογικά χάσματα και απορίες. Τα «Στοιχεία» διακρίνονται για την αρμονία στη σύνταξη και στην παράθεση των θεωρημάτων, για την προσεκτική χρήση βασικών προτάσεων, οι οποίες θεωρούνται αληθείς χωρίς να είναι δυνατόν να αποδειχθούν –όπως για παράδειγμα «από δύο δεδομένα σημεία διέρχεται μία και μοναδική ευθεία»– και για την υποδειγματική αξιοποίηση της μεγάλης ανακάλυψης των Ελλήνων, της έννοιας της **απόδειξης**. Αυτή η πρακτική της απόδειξης σχετιζόταν με την κοινωνική δομή των ελληνικών πόλεων, με την ελεύθερη διατύπωση αιτιολογημένων απόψεων, πολλές φορές αντιτιθέτων με το φαινομενικά προφανές ορθό και γενικότερα με το κλίμα του ορθού λόγου, που το ευνοούσαν οι κοινωνικές συνθήκες και σχέσεις που είχαν αναπτυχθεί στο πλαίσιο της κάθε ελληνικής πόλης. Σε ένα τέτοιο ευνοϊκό από κάθε άποψη κλίμα γράφτηκαν τα «Στοιχεία», με δεδομένη την ιδιαιτερότητα της Αλεξάνδρειας –πόλης που έζησε ο Ευκλείδης– ως πολιτιστικής πρωτεύουσας του ελληνιστικού κόσμου, μιας πόλης που συγκέντρωνε την αφρόκρεμα των καλλιτεχνών, επιστημόνων και τεχνικών της Μεσογείου της εποχής μετά το θάνατο του **Μεγάλου Αλεξάνδρου**. Δεν είναι υπερβολικός ή χωρίς βάση ο ισχυρισμός ότι τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποτελούν την εφαρμογή της Λογικής του **Αριστοτέλη** στο πεδίο των μαθηματικών.

Παρά τη σπουδαιότητα των «Στοιχείων», από την ανακάλυψη της τυπογραφίας μέχρι και το 1952-1953 –κατά σύμπτωση ακριβώς 500 χρόνια μετά την Άλωση της Πόλης– το έργο αυτό δεν είχε εκδοθεί ποτέ ολόκληρο στη νεότερη ελληνική γλώσσα από Έλληνες για Έλληνες. Αυτή την εκδοτική προσπάθεια πραγματοποίησε ο **Ευάγγελος Σταμάτης**, ακούραστος ερευνητής των ελληνικών μαθηματικών. Είναι σχετικά απλό να δώσουμε μια ιδέα για το πώς είναι δομημένα τα «Στοιχεία», επειδή αυτά παρουσιάζουν εξαιρετική ομοιότητα με τα διδακτικά εγχειρίδια από τα οποία διδάσκονται θέματα γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ιδιαίτερα στη χώρα μας έχουμε διατηρήσει αυτό τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας της γεωμετρίας και έτσι ο μέσος Έλληνας αναγνώστης έχει σαφέστερες παραστάσεις για τον τρόπο σύνταξης των «Στοιχείων» χωρίς να έχει την ανάγκη να προσφύγει στο αυθεντικό κείμενο.

Δυστυχώς, στα «Στοιχεία» δεν υπάρχει ένας πρό-



λογος ή ένα εκτενές εισαγωγικό σημείωμα, το οποίο να εκφράζει τους σκοπούς του συγγραφέα, ποιες είναι οι δικές του ανακαλύψεις, ποιες είναι οι πηγές του και γενικά να δίνει πληροφορίες που να δια φωτίζουν την ιστορική και βιβλιογραφική έρευνα. Το 1ο βιβλίο αρχίζει με την παράθεση 23 **όρων**, δηλαδή ορισμών των βασικών εννοιών, οι οποίοι εμφανίζονται συνεχώς στο κείμενο, όπως, για παράδειγμα, γωνία, κύκλος, σημείο, τρίγωνο κ.λπ. Ακολουθούν 5 **αιτήματα**, τα οποία είναι αναπόδεικτες παραδοχές, που επιτρέπουν την κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων, όπως για παράδειγμα «μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα». Συνεχίζει με 9 **κοινές έννοιες**, οι οποίες με τη σημερινή ορολογία είναι αξιώματα, δηλαδή αναπόδεικτες προτάσεις, για να αναπτύξει ο μαθηματικός τους συλλογισμούς πάνω στην ορθότητα ή μη των υπόλοιπων προτάσεων, όπως για παράδειγμα «αν σε ίσα προσθέσουμε ίσα, τότε προκύπτουν ίσα». Στη συνέχεια ακολουθούν μαθηματικές προτάσεις που προκύπτουν ως λογικά επακόλουθα των προηγούμενων προτάσεων, τα αποκαλούμενα **θεωρήματα** και κάποιες δευτερεύουσες προτάσεις –τα λεγόμενα **πορίσματα**– οι οποίες είναι προτάσεις που προκύπτουν άμεσα από τα θεωρήματα. Τον ίδιο τρόπο δόμησης ακολουθούν και τα υπόλοιπα δώδεκα βιβλία των «Στοιχείων», χωρίς όμως να εμφανίζονται άλλες κοινές έννοιες. Στο 9ο βιβλίο περιέχεται ο περίφημος ευκλείδειος αλγόριθμος, μια διαδικασία για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο ή περισσότερων αριθμών. Το βιβλίο Γ αφιερώνεται στους ασύμμετρους αριθμούς και αποτελεί ένα λαμπερό διαμάντι του θησαυρού των ελληνικών μα-

θηματικών. Όπως έγραψε ο διάσημος ιστορικός των μαθηματικών **Τόμας Χιθ** (Thomas Heath), η ανακάλυψη των ασύμμετρων αριθμών και η διαμόρφωση της θεωρίας των σύμμετρων και ασύμμετρων αριθμών αποτελεί μια από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις και θεωρητικές συλλήψεις των Ελλήνων. Συνεπώς, ο Ευκλείδης έπρεπε να δώσει μία εξέχουσα θέση στα ζητήματα αυτά, όπως και το έκανε στο 10ο βιβλίο του. Εξάλλου, η θεωρία αυτή και η διαπραγμάτευσή της τού ήταν απαραίτητη για την έκθεση και απόδειξη των μαθηματικών θεωρημάτων που ακολουθούν.

Στο 13ο βιβλίο αναπτύσσεται μία αριστοτεχνική χρήση της μεθόδου της εξάντλησης, η οποία ανακαλύφθηκε από τον **Εύδοξο τον Κνίδιο**. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στην επ' άπειρον προσέγγιση σχημάτων από άλλα απλούστερα. Για παράδειγμα, με τη μέθοδο της εξάντλησης ο Ευκλείδης απέδειξε ότι τα εμβαδά δύο κύκλων είναι ανάλογα με τα τετράγωνα των διαμέτρων τους. Η μέθοδος της εξάντλησης αποτέλεσε τη βάση πάνω στην οποία κτίστηκε το οικοδόμημα του ολοκληρωτικού λογισμού δύο χιλιάδες χρόνια μετά τον Ευκλείδη και τον άλλο γίγαντα των ελληνικών μαθηματικών, τον **Αρχιμήδη**. Εκτός από τα δεκατρία βιβλία, παλαιότερα στο σώμα των «Στοιχείων» είχαν ενταχθεί και άλλα δύο βιβλία, τα αποκαλούμενα 14ο και 15ο. Όμως, η ►

Ο θεμελιωτής της κλασικής γεωμετρίας σε τρεις διαφορετικές αναγεννησιακές απεικονίσεις, απόδειξη των ελάχιστων γνώσεών μας για τη ζωή του

Τα «Στοιχεία» διακρίνονται και για την αξιοποίηση της μεγάλης ανακάλυψης των Ελλήνων, της έννοιας της απόδειξης

Θαλής ο Μιλήσιος. Και στις δέκα του ανακαλύψεις επιβλήθηκε ο Ευκλείδης ο Αλεξανδρινός. Ρωμαίκο αντίγραφο προτομής του 4ου αιώνα π.Χ. (Μουσείο Βατικανού)

Κι όμως η έρευνα έχει αποδείξει ότι το 14ο βιβλίο είχε γραφτεί το δεύτερο π.Χ. ακόμα από τον Υψηκλή και το 15ο γράφτηκε είτε από τον Υψηκλή είτε από αγνώστο γεωμέτρη του 6ου μ.Χ. αιώνα.

Ας σημειώσουμε ότι ο Ευκλείδης με τα αιτήματα α και γ του πρώτου βιβλίου εμμέσως πλην σαφώς απαιτεί οι κατασκευές των γεωμετρικών σχημάτων να πραγματοποιούνται με τον κανόνα και το διαβήτη. Οι απαιτήσεις αυτές είχαν μία μακρά παράδοση στα ελληνικά μαθηματικά και υποθέτουμε ότι πρόκειται για φιλοσοφικό στόχο των Ελλήνων να αναγάγουν τα πάντα σε ελάχιστες απλές γενικές αρχές, σε έννοιες και ενέργειες, οι οποίες όμως, παρά τη μεταφυσική χροιά που μπορεί να τους αποδοθεί, βασίζονται στην υλική πραγματικότητα της ανθρωπίνης κοινωνίας και του φυσικού κόσμου.

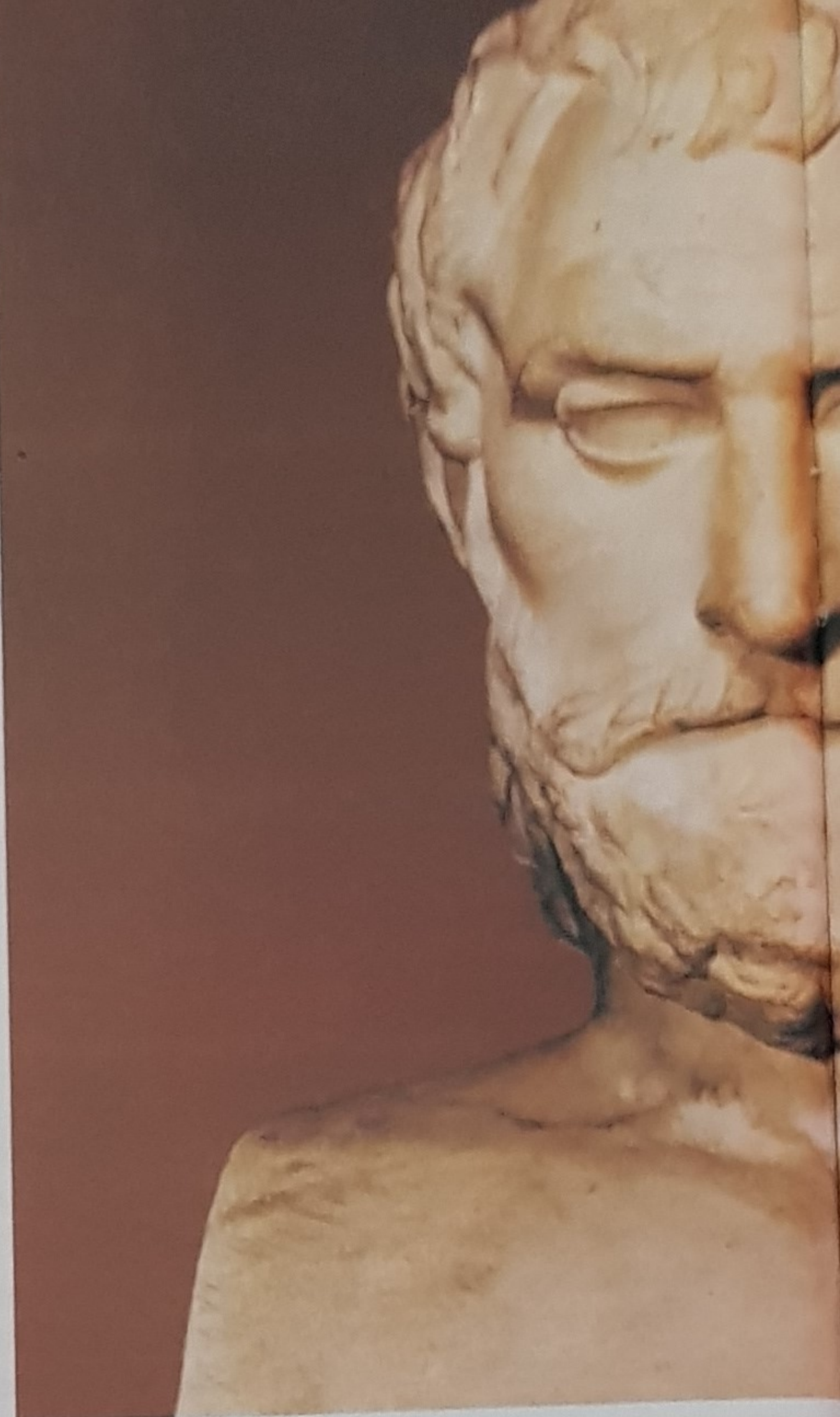
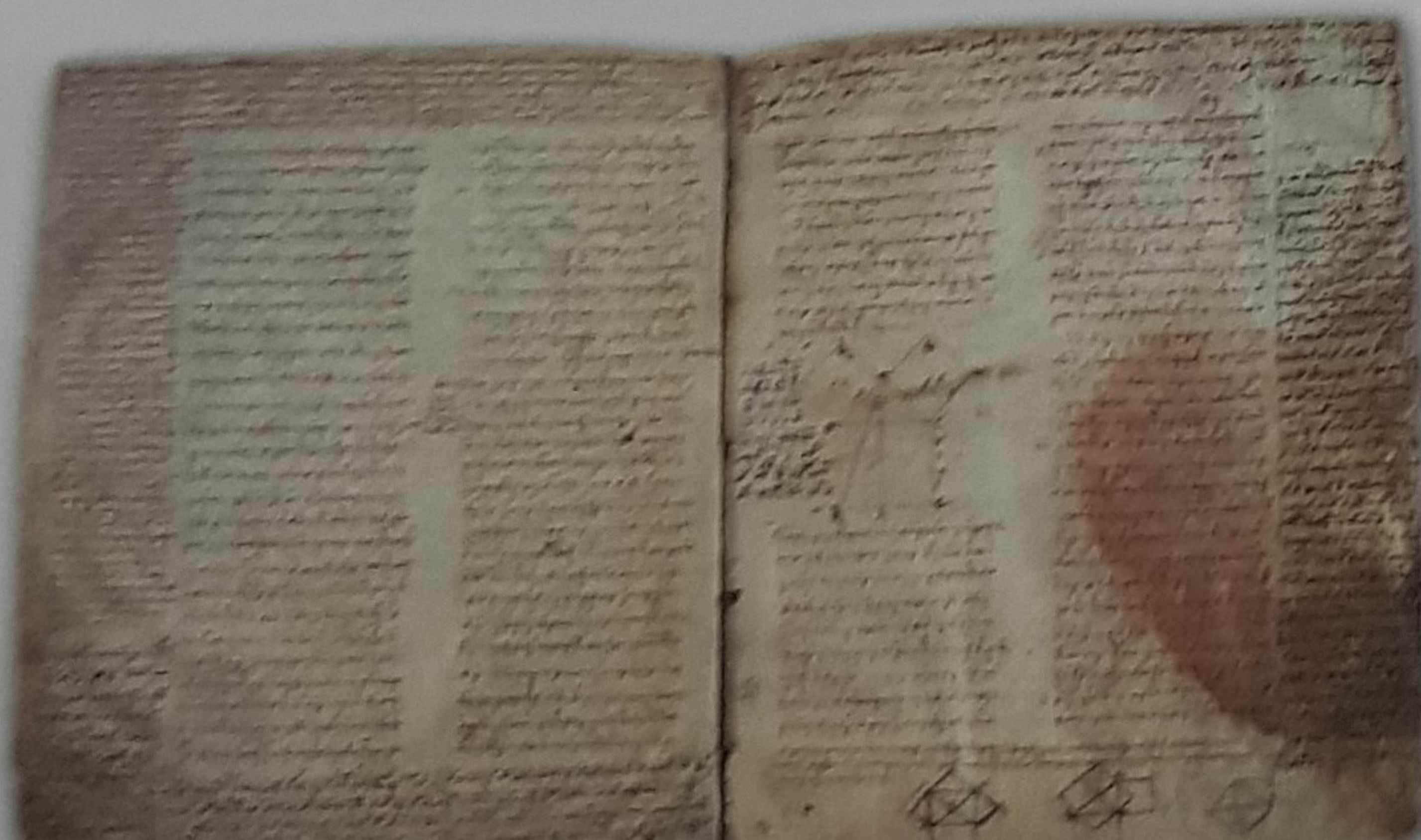
Οι εξαιρετικά σύντομες προτάσεις, όπως είναι τα αιτήματα, περικλείουν βαθιές επιστημολογικές προσεγγίσεις των Ελλήνων για τις γεωμετρικές έν-

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποτελούν την εφαρμογή της Λογικής του Αριστοτέλη στο πεδίο των μαθηματικών

νοιας. Για παράδειγμα, το 4ο αίτημα αναφέρει ότι «όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες». Παρ' ότι αυτό φαίνεται προφανές και χωρίς ιδιαίτερο σκοπό να διατυπώνεται ως αίτημα, στην ουσία του εκφράζει την ομοιογένεια του χώρου, δηλαδή ότι τα γεωμετρικά σχήματα είναι ανεξάρτητα από τη θέση τους στο χώρο και αναλλοίωτα από τις διάφορες μετακινήσεις. Ούτε η επιλογή των ορθών γωνιών είναι τυχαία. Οι ορθές γωνίες, δηλαδή αυτές που έχουν κάθετες πλευρές, χρησιμεύουν στη σύγκριση όλων των άλλων γωνιών.

Τα «Στοιχεία» περιέχουν συνολικά 465 θεωρήματα και γεωμετρικές κατασκευές, τα οποία, όπως προαναφέραμε, συνδέονται αρμονικά ένα μέρος των ανακαλύψεων των μαθηματικών έως και την εποχή του Ευκλείδη, αλλά και του ίδιου του Ευκλείδη. Σε αυτά μπορούμε να βρούμε ανακαλύψεις που έγιναν α-

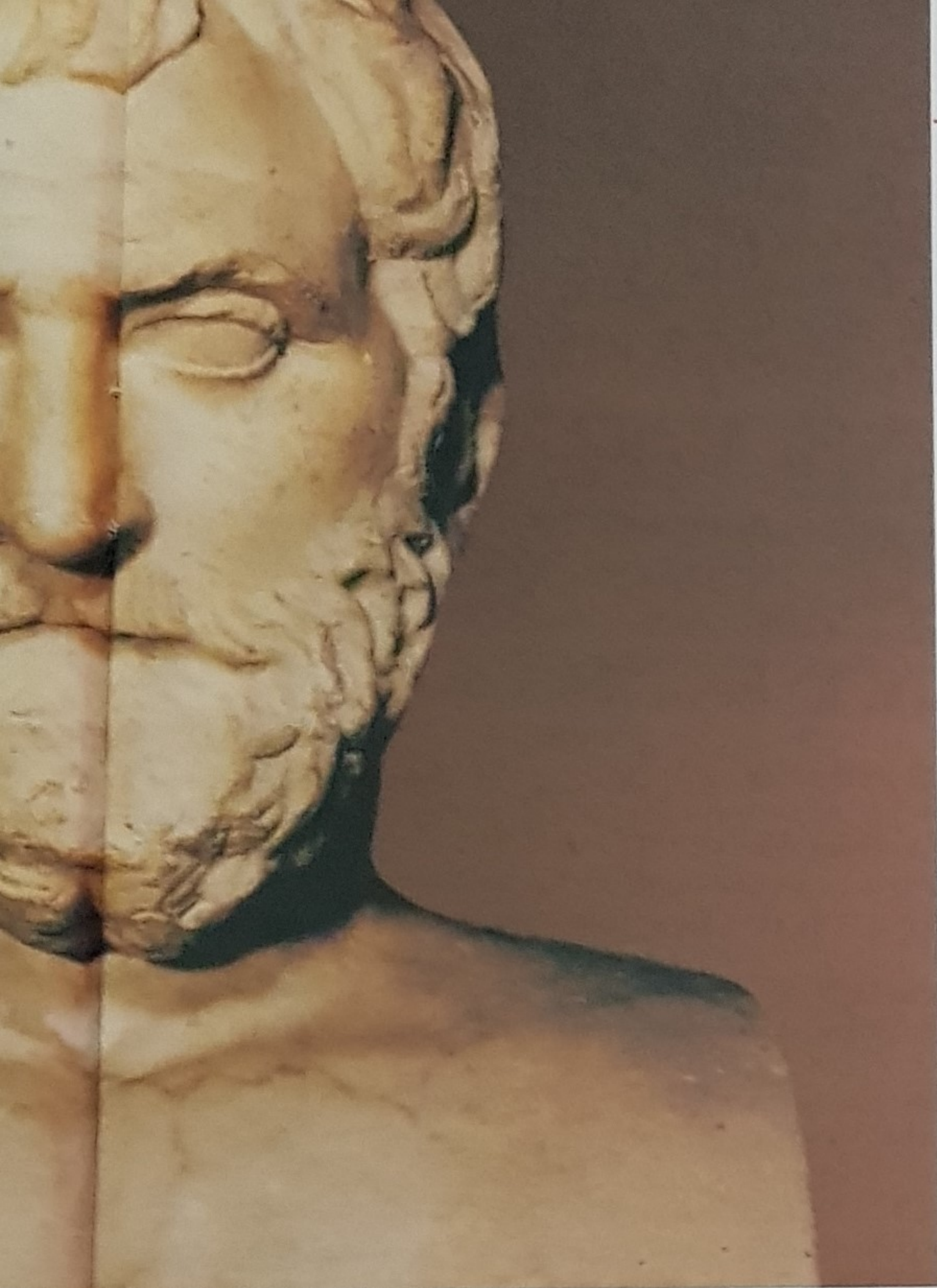
Μεσαιωνικό χειρόγραφο με θεωρήματα του Ευκλείδη



πό τον Πυθαγόρα και τη Σχολή του, θεωρήματα του Θαλή, του Οινόπιδου, του Θεαίππιδου, του Εύδοξου, ενός από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του ελληνικού κόσμου, θεωρήματα που είχαν αποδειχθεί από τον Πλάτωνα και την Ακαδημία του, αλλά και από μέλη της Φιλοσοφικής Σχολής του Κρότωνα. Όλα αυτά σημαίνουν ότι ο Ευκλείδης ήταν πλήρως ενημερωμένος για τις ανακαλύψεις των συγχρόνων και των προγενέστερων μαθηματικών και, το κυριότερο, υπήρχε μία πλήρης και ουσιαστική επικοινωνία μεταξύ των επιστημόνων του ελληνικού κόσμου, παρά τις εύλογες δυσκολίες και τα εμπόδια.

Ο τελικός σκοπός των «Στοιχείων», σύμφωνα με τα όσα γράφουν οι αρχαίοι σχολιαστές, πιθανώς να ήταν η μαθηματική απόδειξη της ύπαρξης μόνο πέντε κανονικών στερεών, δηλαδή στερεών οι έδρες των οποίων είναι ίσα πολύγωνα, με όλες τις πλευρές και τις γωνίες τους ίσες. Οι Έλληνες θεωρούσαν ότι τα κανονικά στερεά αποτελούν τα ιδεατά πρότυπα των δομικών στοιχείων του Σύμπαντος. Αυτή είναι η αιτία που τα ερευνήσαν επιστημονικά και για τον ίδιο λόγο κατέχουν θέση κατακλείδος στα «Στοιχεία».

Σύμφωνα με μαρτυρίες που σώθηκαν, ο Ευκλείδης θα έπρεπε να ήταν και εξαιρετός δάσκαλος των μαθηματικών, άνθρωπος ευρηματικός ως προς



τους τρόπους και τις μεθόδους διδασκαλίας. Χαρακτηριστικό είναι το ακόλουθο ανέκδοτο, το οποίο μας διηγείται ο **Πρόκλος** (σχολιαστής του ευκλείδειου έργου που έζησε τον 5ο μ.Χ. αιώνα). Ο βασιλιάς **Πτολεμαίος ο Α΄** ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπάρχει κάποιος σύντομος τρόπος να μάθει γεωμετρία, υπονοώντας προφανώς ότι ένας βασιλιάς δεν έχει, λόγω των καθηκόντων του, τον απαραίτητο χρόνο για να κάνει συστηματικές σπουδές στην επιστήμη αυτή. Ο Ευκλείδης απάντησε με την περίφημη φράση «δεν υπάρχει βασιλική οδός για τη γεωμετρία». Ένα άλλο πολύ γνωστό ανέκδοτο είναι αυτό που παραθέτει ο **Στοβαίος**. «Κάποιος μαθητής άρχισε μαθήματα γεωμετρίας με τον Ευκλείδη. Αφού έμαθε το πρώτο θεώρημα, ρώτησε το δάσκαλο, “τι δε μοι πλέον έσται ταύτα μανθάνοντι”, δηλαδή τι θα κερδίσω απ’ αυτά που μαθαίνω; Τότε ο Ευκλείδης κάλεσε έναν υπηρέτη και του είπε: Δώσ’ του τρεις δεκάρες, γιατί αυτός πρέπει να κερδίζει από αυτά που μαθαίνει». Αυτό το ανέκδοτο χρησιμοποιείται αρκετές φορές για να τονιστεί ότι η παιδαγωγική αξία ενός δύσκολου μαθήματος ό-πως είναι η γεωμετρία δεν είναι άμεση και τα οφέ-λη έρχονται πολύ αργότερα. Παρά τις ελάχιστες πληροφορίες που έχουμε, ο Ευκλείδης θα πρέπει να συνδύαζε τέλεια την έρευνα με τη διδασκαλία. Συστηματικά αξιοποίησε την έννοια του λάθους, ιδέα για την οποία ορισμένοι σύγχρονοι παιδαγωγοί

θεωρούν ότι «κομίζουν γλαύκα ες Αθήνας». Ο ισχυρισμός αυτός προκύπτει από την ασφαλή πληροφορία ότι ο Ευκλείδης είχε συγγράψει ένα έργο με τον τίτλο «Ψευδάρια», στο οποίο διατύπωνε μαθηματικές προτάσεις λανθασμένες, αλλά και προτάσεις ορθές με λανθασμένες αποδείξεις, τις οποίες οι ασκούμενοι αλλά και οι άλλοι μαθηματικοί έπρεπε να εντοπίσουν, να ερμηνεύσουν και να τις αποκαταστήσουν ως προς την ορθότητα. Η παράδοση αναφέρει ότι ο Ευκλείδης ήταν σεμνός και ευγενικός. Ακουγε με υπομονή τις απορίες και τις αντιρρήσεις και διόρθωνε τις λανθασμένες απόψεις των συνομιλητών του με λογικά επιχειρήματα και κυρίως χωρίς την έπαρση της αυθεντίας.

Τα «Στοιχεία» έχουν τέτοια αυτονομία και τέτοια πληρότητα που για αιώνες αποτέλεσαν όχι μόνο πρότυπο συγγραφής επιστημονικού έργου, αλλά και πηγή εμπνεύσεων και γόνιμων ιδεών και για πνευματική δημιουργία σε θέματα εντελώς άσχετων με



Πτολεμαίος Α΄.
Εμαθε από τον Ευκλείδη ότι δεν υπάρχει «βασιλική οδός» για τη γνώση

Υπήρχε μία πλήρης και ουσιαστική επικοινωνία μεταξύ των επιστημόνων του ελληνικού κόσμου, παρά τις εύλογες δυσκολίες

τη γεωμετρία. Για παράδειγμα η «Ηθική» του μεγάλου φιλόσοφου **Μπαρούχ Σπινόζα** (1632-1677) είναι γραμμένη στο στιλ και στο πνεύμα των «Στοιχείων».

Σωζόμενο έργο του Ευκλείδη, το οποίο κατέχει εξέχουσα θέση στην ανάπτυξη της επιστήμης, είναι τα «**Οπτικά**». Πρόκειται για μια μαθηματική ερμηνεία των φαινομένων διάδοσης του φωτός, του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνεται το ανθρώπινο μάτι τα περί αυτό αντικείμενα, είναι μία θεωρία για την οπτική προοπτική. Η σύνταξη των «Οπτικών» είναι όμοια με αυτή των «Στοιχείων». Δηλαδή ορίζονται κάποια αξιώματα και στη συνέχεια διατυπώνονται επιστημονικές προτάσεις για το φως, η ερμηνεία των οποίων προκύπτει από γεωμετρικά θεωρήματα. Για παράδειγμα, αξίωμα για τον Ευκλείδη αποτελεί η εμπειρική διαπίστωση ότι το φαινόμενο μέγεθος κάθε παρατηρούμενου αντικειμένου ▶

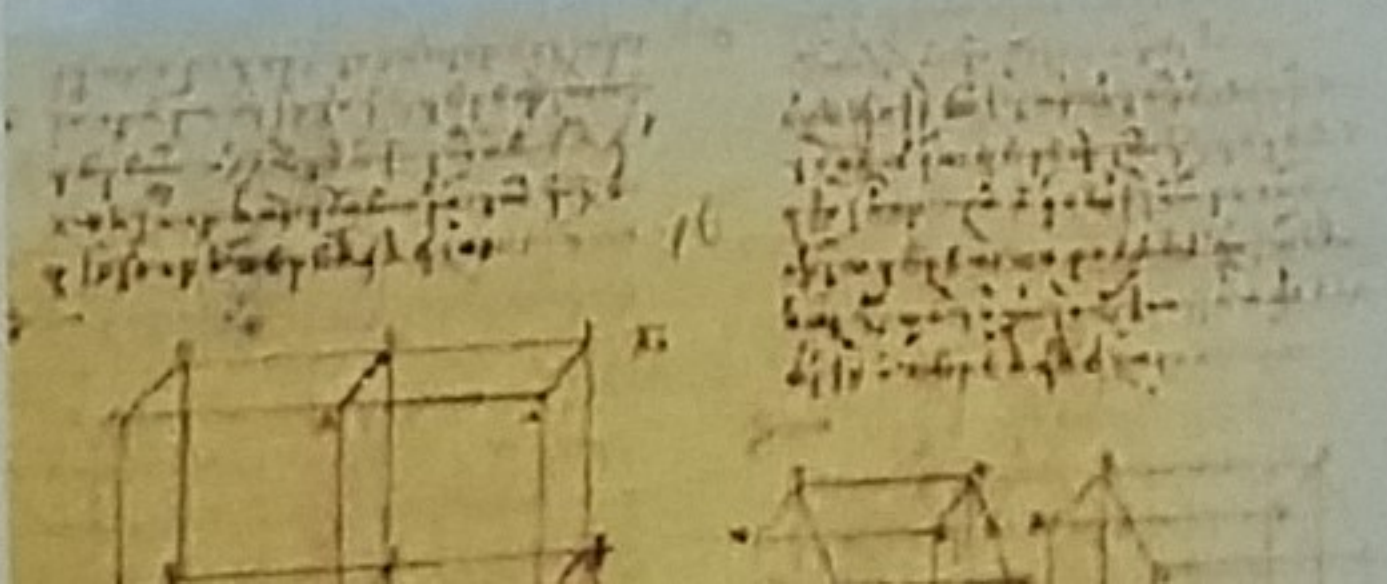
Εργα του Ευκλείδη

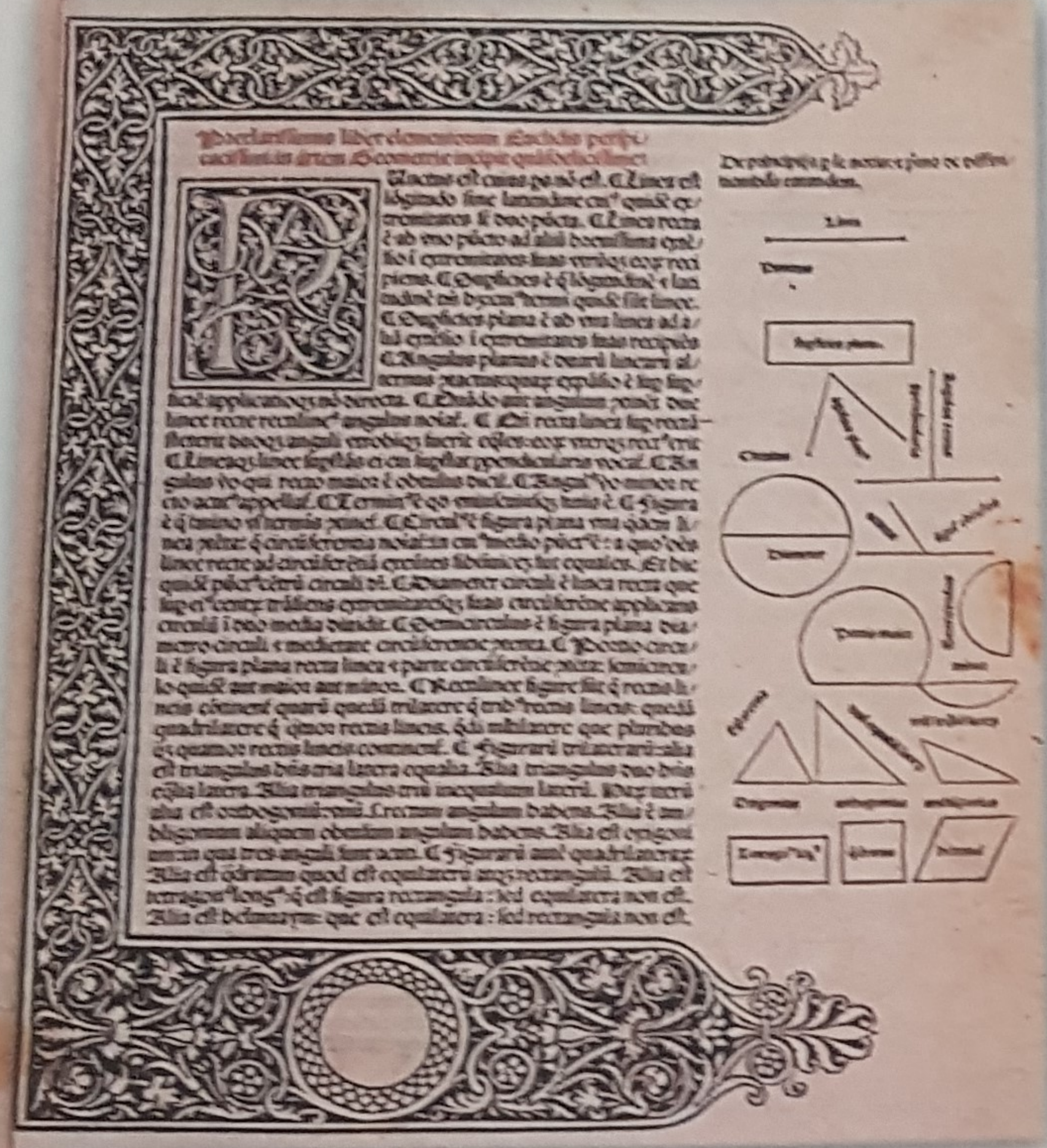
▶ που δεν έχουν βρεθεί ακόμη

1. Ψευδάρια
2. Πορίσματα, βιβλία 3
3. Τόποι προς επιφάνεια, βιβλία 2
4. Κωνικά τομαί, βιβλία 4

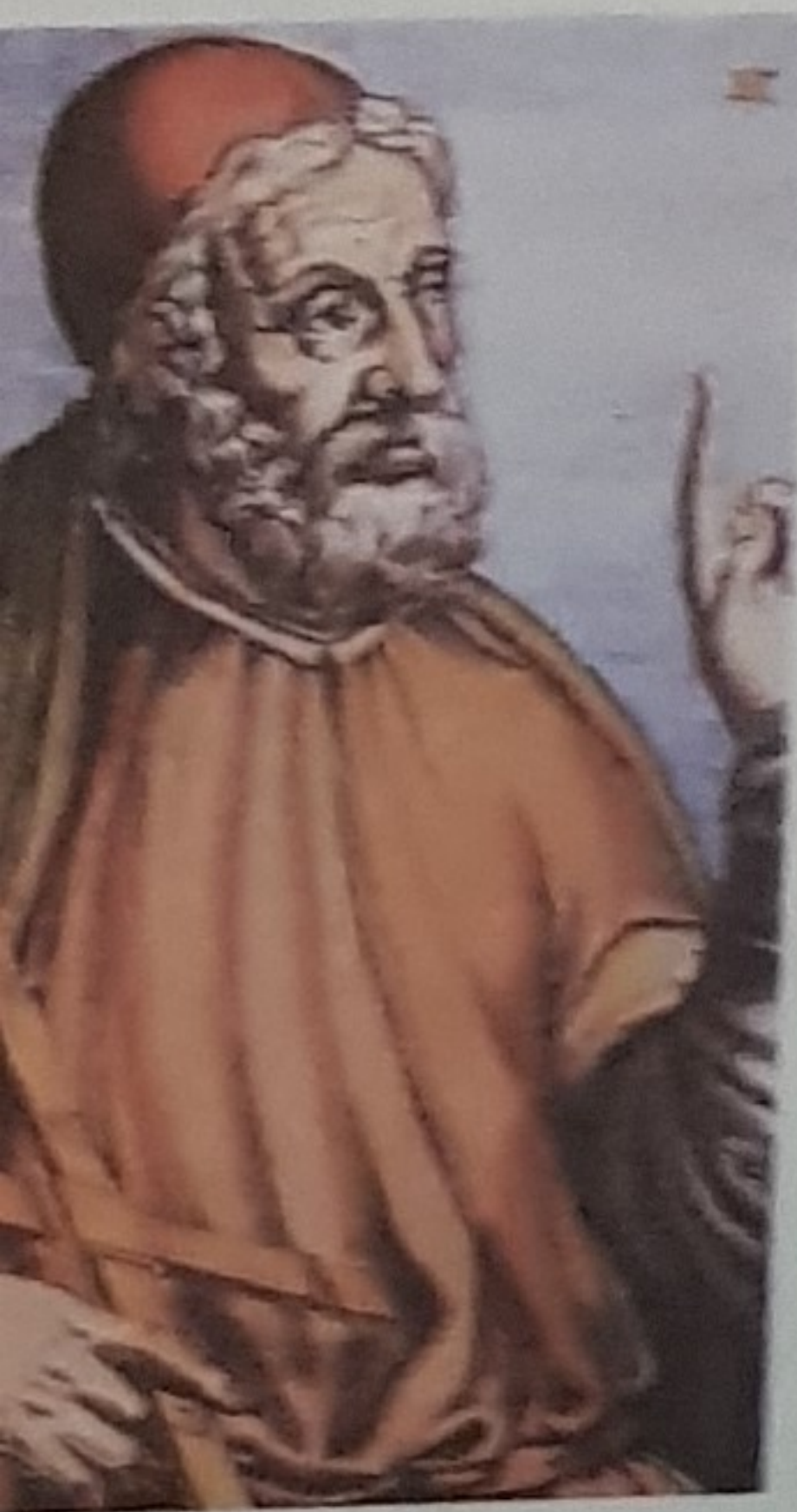
▶ που έχουν βρεθεί

1. Στοιχεία, βιβλία 13
2. Δεδομένα
3. Περί διαιρέσεων, βρέθηκε το 1851 σε αραβική μετάφραση
4. Οπτικά
5. Κατοπτρικά
6. Φαινόμενα
7. Κατατομή κανόνος
8. Εισαγωγή αρμονική





Βιβλίο του
Ευκλείδη σε
λατινική έκδοση.
Κάτω, ο
Πτολεμαίος που
απεικονίζεται με
χαρακτηριστικά
παρόμοια προς
του Ευκλείδη



είναι συνάρτηση της απόστασής του από τον παρατηρητή, συνεπώς είναι συνάρτηση της γωνίας παρατήρησης. Τα «Οπτικά» ήταν ο πρόδρομος του σπουδαιότερου έργου γεωμετρικής οπτικής των Ελλήνων, που γράφτηκε 150 χρόνια αργότερα, δηλαδή των «Οπτικών» του Πτολεμαίου Κλαύδιου.

Είναι γνωστό ότι στις βιβλιοθήκες και στα αρχεία της Αιγύπτου, των υπόλοιπων χωρών της Μέσης Ανατολής, ακόμη και στο μακρινό Πακιστάν και στις Ινδίες υπάρχει τέτοιος πλούτος παλαιών κειμένων που περιμένουν τους ερευνητές, ώστε δεν αποκλείεται να βρεθούν εκεί χαμένα έργα του Ευκλείδη, σχολιασμένα κείμενα άκρως πολύτιμα για την κατανόηση των έργων αυτών και γενικά έργα της αρχαίας ελληνικής γραμματείας που σήμερα τα θεωρούμε απολοσθέντα, έργα τα οποία στην αρχαιοελληνική τους γραφή ορισμένοι «χριστιανοί» εσκεμμένα και συστηματικά αποσιώπησαν ή και κατέστρεψαν. Αυτό σημαίνει ότι παρά τους δύσκολους καιρούς που διανύουμε και τα πρόσφατα τραγικά γεγονότα, εμείς οι Έλληνες έχουμε και επιπλέον λόγους να διατηρούμε δεσμούς με τους λαούς της Ανατολής.

Πρόδρομος των «Οπτικών» του Πτολεμαίου Κλαύδιου, του σπουδαιότερου έργου γεωμετρικής, ήταν τα «Οπτικά» του Ευκλείδη

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ευκλείδου του Αλεξανδρέως, *Δεδομένα*. Εκδόσεις Teubner, Λειψία, 1896.
- Ευκλείδου του Αλεξανδρέως, *Δεδομένα*. Σχόλια και γερμανική μετάφραση. J. Wurm, Springer Verlag, Βερολίνο 1962.
- Ευκλείδου του Αλεξανδρέως, *Περί διαιρέσεων*. Αθήνα, 1998.
- Κοσιάνης Νικ. και Τοκμακίδης Αναστ., *Η ιστορική κληρονομιά των «Στοιχείων» του Ευκλείδη στην ανθρωπότητα*. Περιέχεται στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά* (Επιμ. Δ. Αναπολιάνος και Β. Καρασβάνης), Τροχαλία, Αθήνα, 1993, σελ. 67-92.
- Κουρνιάτη Α.Μ., *Οπτικά του Ευκλείδη και Προοπτικές Απεικονίσεις*. Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Αρχιτεκτόνων Ε.Μ.Π., Μάρτιος 1998.
- Μυρικός Μαυρίκιος, *Τα περίφημα άλγεα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας*. Αθήνα, 1970.
- Πούλος Ανδρέας, *Ελληνική Μαθηματική Βιβλιογραφία (1500-1900)*. Συνοπτική Ιστορία του Ελληνικού μαθηματικού βιβλίου. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1988.
- Σπινδάτος Ευάγγελος, *Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας*. 1η έκδοση. Αθήνα, 1996.
- Σπινδάτος Ευάγγελος, *Οι χαμένες πραγματείες του Ευκλείδου*. Αθήνα, 1999.
- Σπινδάτος Ευάγγελος, *Τα Οπτικά και τα Κατοπτρικά του Ευκλείδου*. Αθήνα, 1999.
- Σπινδάτος Ευάγγελος, *Τα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων*. Αθήνα, 2000.
- Σπινδάτος Ευάγγελος, *Τα φαινόμενα του Ευκλείδου*. Αθήνα, 2000.
- Σταμάτης Ευάγγελος, *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχείων*. Εισαγωγή - Αρχαίων Κείμενων - Μετάφρασις. Βιβλ. I, II, III, IV. Τόμος I. Εκδ. Ν. Σακκουλά. Αθήνα, 1952.
- Επανεκδοση Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα, 1975.
- Σταμάτης Ευάγγελος, *Ευκλείδου Γεωμετρία - Θεωρία Αριθμών*. Εισαγωγή - Αρχαίων Κείμενων - Μετάφρασις - Επεξηγήσεις. Στοιχείων Βιβλ. V, VI, VII, VIII, IX. Τόμος II. Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα, 1953.
- Σταμάτης Ευάγγελος, *Ευκλείδου Περί Ασυμμέτρων, Στοιχείων Εισαγωγή - Αρχαίων Κείμενων - Μετάφρασις*. Βιβλ. X. Τόμος III. Εκδοση Εθνικού Τυπογραφείου. Αθήνα, 1956/57. Επανεκδοση Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα, 1975.
- Σταμάτης Ευάγγελος, *Ευκλείδου Στερεομετρία, Στοιχείων Εισαγωγή - Αρχαίων Κείμενων - Μετάφρασις*. Βιβλ. XI, XII, XIII. Τόμος I. Ο.Ε.Δ.Β. 1957.
- Σταμάτης Ευάγγελος, *Επί του 10ου βιβλίου των Στοιχείων του Ευκλείδου*. Αυτοέκδοση. Αθήνα, 1959.
- Heath Thomas, *History of Greek Mathematics*. Vol. I, II. Dover, New York, 1981.
- Heath Thomas, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Επανεκδοση. N.Y. Dover, 1956.
- Lindberg David, *Οι απαρχές της Δυτικής Επιστήμης*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π. Αθήνα, 1997.
- Morrow G., *Proclus, A commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton University Press. Princeton, 1970.
- Murdoch J., *Euclid. Transmission of the Elements*. Dictionary of Scientific Biographies. Ed. C.C. Crillispie. Vol. 4. N.Y. 1973, p. 437-479.
- Steck M., *Bibliographia Euclideana*. Gerstenberg Verlag. 1981.

624 (κατ' άλλους το 643)

Γέννηση του Θαλή στη Μίλητο της μικρασιατικής παραλίας, ιδρυτή της θεωρητικής γεωμετρίας.

585

Ο Θαλής προβλέπει μια έκλειψη Ηλίου.

580-500

Περίοδος ακμής του σπουδαιού Πυθαγόρα. Ιδρύει τις περίφημες σχολές του στην πατρίδα του Σάμο και στον Κρότωνα (Κάτω Ιταλία). *Πυθαγόρειον θεώρημα*

5ος αιώνας

Ιπποκράτης ο Χίος, γεωμέτρης, πρόδρομος του Ευκλείδη.

Κατέφυγε στην Αθήνα, όπου ίδρυσε σχολή.

460

Γέννηση του Δημόκριτου στα Αβδηρα της Θράκης.

455

Γέννηση του Θεαίτητου, Αθηναίου μαθηματικού.

433

Μεταρρύθμιση του ημερολογίου από τον αστρονόμο Μέτωνα.

336

Γέννηση του Επίκουρου στην Αθήνα.

310

Γέννηση στη Σάμο του αστρονόμου Αρίσταρχου.

306

Ιδρύεται η Επικούρειος σχολή στην Αθήνα

300 (κατ' άλλους το 330)

Γέννηση του Ευκλείδη.

Αντικρουόμενες οι απόψεις για τον τόπο καταγωγής του. Άλλοι αναφέρουν την Τύρο της Συρίας κι άλλοι τη Σικελία.

Σπουδαιότερο έργο του τα

Στοιχεία, σημαντικό διδακτικό

βοήθημα επί αιώνες, έργο που

στηρίζεται στις θεωρίες

προγενέστερων μαθηματικών της αρχαιότητας.

287

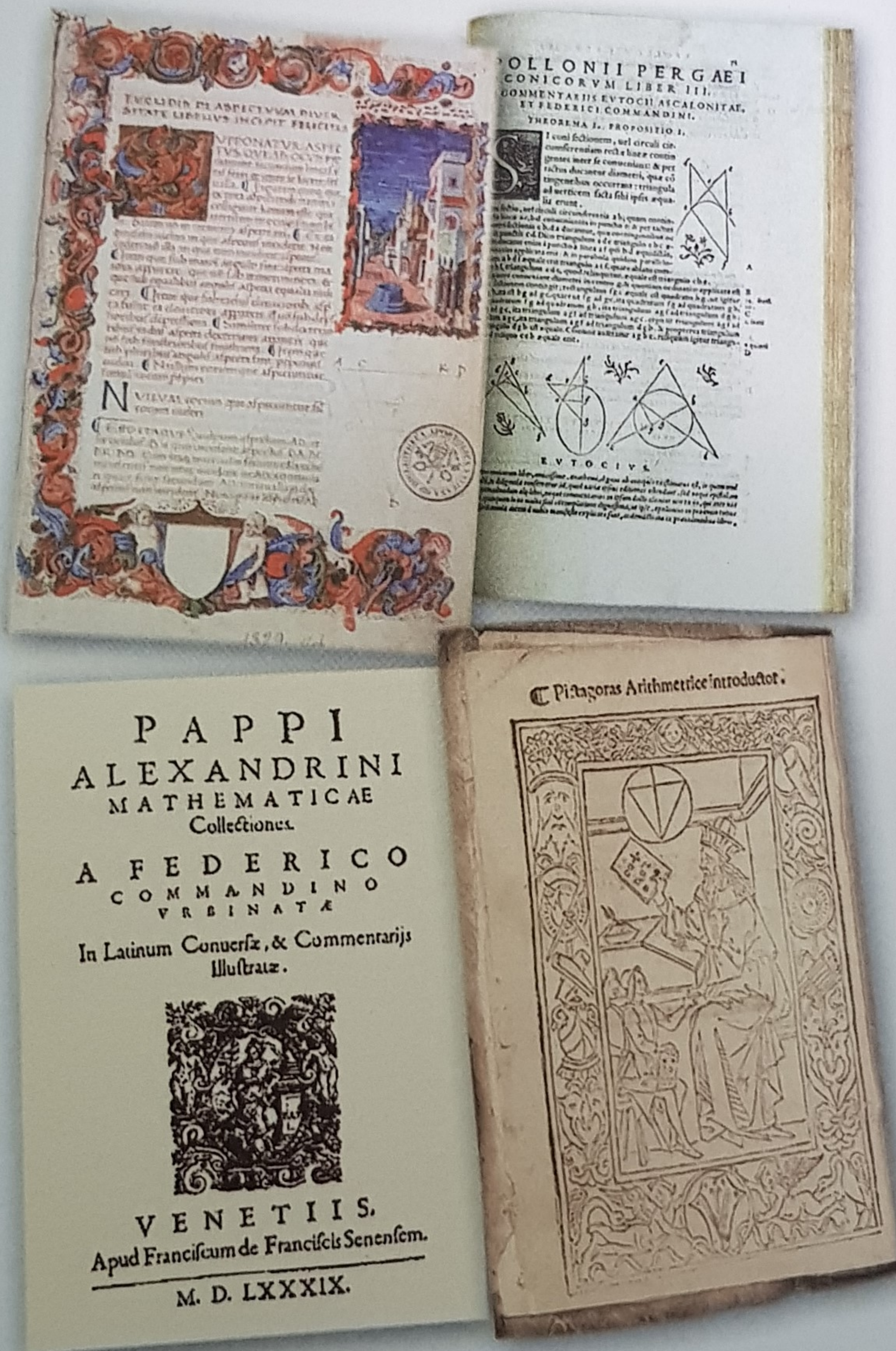
Γέννηση του Αρχιμήδη στις Συρακούσες. Κυριότερα έργα του ο *Ψαμμίτης*, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* και βεβαίως η περίφημη *Αρχή του*

Αρχιμήδους, νόμος της υδροστατικής.

212

Στη διάρκεια της πολιορκίας των Συραकुσών από τον Ρωμαίο στρατηγό Μάρκελλο ο Αρχιμήδης δέτει τις γνώσεις του

στην προάσπιση της πατρίδας του εφαρμόζοντας πλείστες εφευρέσεις του για την άμυνα των Συρακουσών. Τελικά σκοτώνεται ο μεγαλύτερος όλων των μαθηματικών από το σπαθί ενός Ρωμαίου στρατιώτη



Στην κορυφή αριστερά, λατινική έκδοση βιβλίου του Ευκλείδη με εικονογραφήσεις για την προοπτική και δεξιά, σελίδα λατινικού βιβλίου του Απολλώνιου του Περγαίου. Πάνω αριστερά, η σελίδα τίτλου της έκδοσης του F. Commandino (Βενετία 1589) του έργου του μαθηματικού Πάππου του Αλεξανδρέως (3ος μ.Χ. αιώνας) «Μαθηματική Συναγωγή» και δεξιά, λατινική Αριθμητική του Πυθαγόρα

ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Ε

της ΧΡΙΣΤΙΝΑΣ Π. ΦΙΛΗ

επίκουρης καθηγήτριας του ΕΜΠ, διδάτριάτρια,
ανταρραβωντος μελους της Αθηνους Ακαδημίας
της Ιστορίας των Επιστημών

πειτα από μια πολιορκία τριών ετών, τα στρατεύματα του Κλαύδιου Μάρκου (Μαρκελλού) κατορθώνουν να κυριεύσουν τις Συρακούσες το 212 π.Χ. Η υπεροχή της πόλης σε τεχνολογικά επιτεύγματα ήταν μια από τις αιτίες της μακρόχρονης αντίστασής της. Για τους Ρωμαίους η δύναμη των πολιορκημένων οφειλόταν σ' ένα μηχανικό ο οποίος συνέλαβε και κατασκεύασε όλα τα αμυντικά έργα τον Αρχιμήδη.

Μια τέτοια μορφή, εξαιρετικά πολύτιμη για να ανημερώσει τις απειλές του Αννίβα, έπρεπε να διασωθεί στη διάρκεια της εισβολής. Αυτή φαίνεται ότι ήταν η εντολή του Μαρκελλού. Όμως ένας άγνωστος Ρωμαίος στρατός διακόπτει τους συλλογισμούς του πρεσβύτερου μ' ένα σπαθί. Είσι χάθηκε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, από τον οποίον κανείς δεν θεωρήθηκε ποτέ μεγαλύτερος.

Στην πραγματεία του Ψάμμιτης, όπου διατυπώνει ένα σύστημα εύρεσης μεγάλων αριθμών [10¹⁰] υπολογίζοντας το πλήθος των κόκκων άμμου (ψάμμου), τους οποίους χωρεί το πεπερασμένο σφαιρικό σύμπαν (το πρόβλημα αυτό αποτελεί το πρόσχημα για την παρουσίαση του αριστάρχειου ηλιοκεντρικού συστήματος), αναφέρει πως ο πατέρας του ήταν ο αστρονόμος Φειδίας, ο οποίος θα ήταν και ο πρώτος δάσκαλός του. Αργότερα συμπληρώνει τις γνώσεις του στην Αλεξάνδρεια, με τους διδασκάλους του Ευκλείδη, όπου και επινοεί τον κοχλία, μια αρδευτική μηχανή.

Ελληνες συγγραφείς αναφέρονται στα καυστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη με τα οποία κατέσφραξε το ρωμαϊκό στόλο, οι Λατίνοι το αποσιωπούν, ενώ αρκετοί το αμφισβητούν ακόμη και σήμερα. Ο μηχανολόγος και ειδικός σε θέματα ηλιακής ενέργειας

Ο Κλαύδιος Μάρκελλος, κατακτητής των Συρακουσών





γείας, δρ Ι. Σακκάς, ενθαρρυνόμενος από το δια-
πρεπή ιστορικό των μαθηματικών Ευάγγελο Στα-
μάτη (1898-1990) πέτυχε πειραματικά¹² το 1973 στον
όρμιο του Σκαρμαγκά (παρουσία του διοικητή της
Ναυτικής Εκπαίδευσης ναυάρχου Λ. Δούση κ.ά.),
με 36 μικρά κάτοπιρα 6x6 να καύσει ξύλο σε από-
σταση 2,4 μ., καιαρρίπιοντας τους ισχυρισμούς¹³
των Κίρχερ (Kircher), Μπουφόν (Buffon) κ.ά.

Ως τις αρχές του 20ού αιώνα η «διαθήκη» του
Αρχιμήδη «κρυβόταν» σ' ένα παλιμψησίο, μέχρις
ότου ο Δανός καθηγητής Γ.Λ. Χάιμπεργκ (J. L.
Heilberg) ανακαλύπτει την πραγματεία *Περὶ Μη-
χανικῶν Θεωρημάτων πρὸς Ερατοσθένη Εφοδος*
(Μέθοδος), το 1906-7. Το κείμενο αυτό μαζί με τους
προλόγους των άλλων πραγματειῶν μᾶς αποκαλύ-
πτει τη μαθηματική του σκέψη.

Γνώστης των νόμων της στατικής, ο Αρχιμήδης
αποδέχεται πως κάθε μη αβαρές σώμα έχει ένα
κέντρο βάρους. Αν και ο μοχλός και ο ζυγός ήταν
γνωστά εργαλεία από τα βάθη των αιώνων, ο
Αρχιμήδης, στο πρώτο βιβλίο του έργου του *Περὶ*
Επιπέδων Ισορροπιῶν, μ' ένα ελάχιστο αριθμό α-
ξιωμάτων όπου διαφαίνεται η μαθηματική του υ-

Ο θάνατος του
Αρχιμήδη.
Αντίγραφο
ρωμαϊκού
ψηφιδωτού του
3ου αι. μ.Χ.
(Φρανκφούρτη,
Δημοτικό
Ινστιτούτο
Τέχνης).
Στη μέση, ο
Αρχιμήδης.
Ελαιογραφία
(1630) του
Jusepe de Ribera
(Μουσείο Πράντο,
Μαδρίτη)



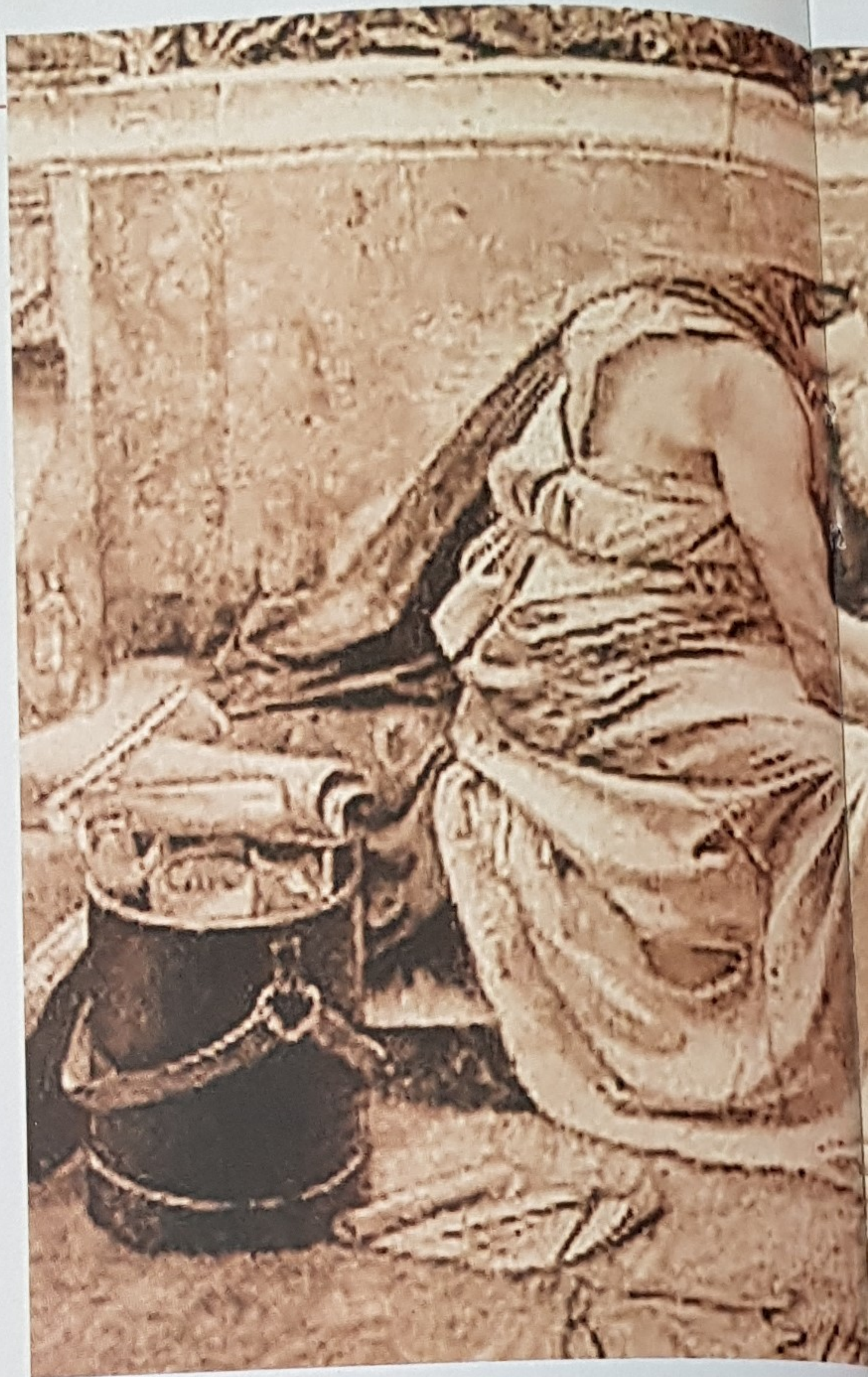
Δύο παλίνψηστα
με έργα του
Αρχιμήδη περί
επιπλεόντων
σωμάτων του 10ου
(πάνω) και του
12ου αιώνα
(απέναντι).
Το πρώτο
δημοπρατήθηκε
από τον οίκο
Κρίστις τον
Οκτώβριο του
1998 στη Ν. Υόρκη

περοχή, διατυπώνει αυτούς τους νόμους.¹⁴ Ο απόη-
χός τους έχει μερικά αγγίξει όλους μας με την α-
ποδιδόμενη σ' αυτόν φράση: Δος μοι πα στω και
ταν γαν κινάσω (σύμφωνα με τον Ηρώνα και τον
Πάππο). Μετά τη διατύπωση των νόμων του μο-
χλού, μελετά κυρίως το κέντρο βάρους του τριγώ-
νου.¹⁵

Στην αρχή λοιπόν του γράμματος προς τον Ερα-
τοσθένη, αναφέρεται στον τειραγωνισμό του τμή-
ματος της παραβολής. Εκείνο όμως που θα θέλαμε
να τονίσουμε είναι τη χρήση της στατικής για την
επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων και την «ανά-
λυση» του εμβαδού σε άθροισμα ευθύγραμμων
τμημάτων, όπως και του όγκου σε άθροισμα επίπε-
δων τομών. Γενικότερα δε θα λέγαμε, του «συνε-
χούς» σε άθροισμα απείρων αδιαίρετων.¹⁶

Ενα μεγάλο μέρος της έρευνάς του είναι αφιε-
ρωμένο στον καθορισμό του κέντρου βάρους¹⁷ ομο-
γενών σημάτων, τα οποία ορίζονται γεωμετρικά. Σ'
όλη αυτή τη φάση απεικονίζεται ο μηχανικός.
Ομως στην πραγματεία του *Τειραγωνισμός Παρα-
βολής*¹⁸ αποδεικνύει πρώτα με μεθόδους της μη-
χανικής και ύστερα με γεωμετρία, πως το εμβαδόν
παραβολικού τμήματος είναι ίσο προς τα $\frac{4}{3}$ του
τριγώνου που έχει βάση τη βάση του τμήματος και
ύψος το ίδιο. Στις προτάσεις 12-16, αν και δίδει α-
ποδείξεις βασισμένους στη μηχανική, τις οικοδο-
μεί με θαυμαστό τρόπο πάνω σ' ένα εκπληκτικό

Ελληνες συγγραφείς αναφέρονται στα
καυστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδη. Οι Λατίνοι
το αποσιωπούν, ενώ αρκετοί το αμφισβητούν



σύστημα ανισοτήτων.

Ο Αρχιμήδης δεν έχει καμιά προκατάληψη, ξέ-
ρει να «δανείζεται» με επιτυχία από διαφορετι-
κούς κλάδους της επιστήμης. Ετσι μετασχηματίζει
τη μεθοδολογία της μηχανικής, που χρησιμοποιεί
στη *Μέθοδο*, και δεν αναλύει το τμήμα της παρα-
βολής σε μια απειρία ευθειών, αλλά εγγράφει και
περιγράφει δύο ακολουθίες από τραπέζια καταλή-
γοντας «μέσω Ευδόξου» ότι αφού το σχήμα δεν εί-
ναι ούτε μεγαλύτερο του $\frac{1}{3}$ ούτε μικρότερο του
 $\frac{1}{3}$ του τραπεζίου θα είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ του τρα-
πεζίου. Αυτή η συσχέτιση στατικής και γεωμετρίας
θα συνοδεύει τη σκέψη του και «ζυγίζοντας» το
παραβολικό τμήμα θα συμπεράνει πως ισούται με
τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου ίδιας βάσης και ίδιου ύψους.
Μάλιστα στο γράμμα του προς τον Ερατοσθένη
(στη *Μέθοδο*) υπογραμμίζει ότι δεν προσφέρει μι-
κρή υπηρεσία στα μαθηματικά, καθώς νομίζει πως
αρκετοί από τους συγχρόνους του ή από τους μετα-
γενέστερους μ' αυτόν τον τρόπο (μηχανική και με-
τά γεωμετρία) θα βρουν και άλλα θεωρήματα τα ο-
ποία δεν έχει ακόμη σκεφθεί.

Στη συνέχεια αυτού του γράμματος παρουσιάζει
πώς η στατική του επιτρέπει να βρει το λόγο της
σφαίρας προς τον περιγεγραμμένο κύλινδρο. Από



το θεώρημα ότι κάθε σφαίρα είναι τετραπλάσια του κώνου που έχει βάση το μέγιστο κύκλο, ύψος δε την ακτίνα της σφαίρας, σκέφτηκε πως η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μέγιστου κύκλου της, αφού θεωρεί ότι κάθε κύκλος ισούται με το τρίγωνο που έχει βάση την περιφέρεια του κύκλου, το δε ύψος ισούται με την ακτίνα του κύκλου και κάθε σφαίρα ισούται με κώνο ο οποίος έχει βάση την επιφάνεια της σφαίρας και ύψος την ακτίνα της σφαίρας.

Αυτά τα αποτελέσματα μελετά και παρουσιάζει στο 1ο Βιβλίο του έργου του *Περί Σφαιρας και Κυλίνδρου*,¹⁹ μια από τις πιο ονομαστές πραγματείες του μεγάλου Συρακούσιου. Μάλιστα στην προτασόμενη επιστολή προς τον Αλεξανδρινό μαθηματικό **Δοσίθεο** τονίζει πως τα θεωρήματα αυτά δεν είχαν απασχολήσει τους προγενέστερους μαθηματικούς.

Ακολουθούν έξι αξιώματα²⁰ όπου δίδει τους ορισμούς: κοίλων και κυρτών γραμμών, επιφανείας, στερεού τομέως, στερεού ρόμβου. Το 5ο κατά σειρά είναι το περίφημο αξίωμα της συνέχειας²¹ ή αξίωμα του Αρχιμήδη, όπου αναφέρει ότι αν είχαμε δύο άνισες γραμμές, ή άνισες επιφάνειες, ή



Στη μέση, «Μη μου του κύκλους τάραττε», σε μια κλασικιστική ανιστορική απεικόνιση

άνισα στερεά και το μεγαλύτερο απ' αυτά (γραμμή, επιφάνεια ή στερεό) διαφέρει από το μικρότερο κατά ποσότητα οσονδήποτε μικρή, αν η μικρή αυτή ποσότητα επαναληφθεί πολλές φορές θα φθάσει στιγμή κατά την οποία θα γίνει μεγαλύτερη του αρχικώς ληφθέντος μεγαλύτερου μεγέθους.²²

Επειτα από 32 θεωρήματα, ο Αρχιμήδης υπολογίζει την επιφάνεια και τον όγκο της σφαίρας. Ο **Πλούταρχος** μας διασώζει πως θεωρούσε τόσο σημαντικά αυτά τα αποτελέσματά του, ώστε ζήτησε από τους δικούς του να τοποθετήσουν επιτύμβια στήλη στον τάφο του, απεικονίζοντας την εγγεγραμμένη σφαίρα στον κύλινδρο και να γραφεί ο λόγος των δύο στερεών.²³

Στην πραγματεία του *Περί Σφαιροειδών και Κωνοειδών* εισάγει τρία καινούργια στερεά εκ περιστροφής: το ελλειψοειδές, το παραβολοειδές και το υπερβολοειδές. Εχοντας μελετήσει τις επίπεδες τομές, τα εφαιπόμενα επίπεδα και τους ασυμπτωτικούς κώνους, αναλύει τα στερεά σε παράλληλα ισόπαχα στρώματα και υπολογίζει αυτούς τους όγκους καθ' υπέρβασιν και καθ' έλλειψιν, αντικαθιστώντας κάθε στρώμα από ένα κύλινδρο περιγεγραμμένο και εγγεγραμμένο στο στερεό. Για το συμπέρασμα του συλλογισμού χρησιμοποιεί το σκεπτικό του **Εύδοξου**, αυτό που κατά το 17ο αιώνα ονομάστηκε «μέθοδος εξάντλησης». Μ' αυτό τον ►

Ο Αρχιμήδης δεν έχει καμιά προκατάληψη, ξέρει να «δανείζεται» με επιτυχία από διαφορετικούς κλάδους της επιστήμης

Χειρόγραφο από
αραβικό κώδικα
του έργου του
Αρχιμήδους «περί
των επιψαυόντων
κύκλων»



Ο Αρχιμήδης μετέφερε στη μαθηματική γλώσσα απλές γνώσεις και εμπειρίες και δημιούργησε την επιστήμη της υδροστατικής

τρόπο εμφανίζονται τα «αθροίσματα Riemann» και τα ορισμένα ολοκληρώματα.

Τα παιδικά του χρόνια τα περνά διπλά στη θάλασσα γευόμενος τις χαρές της. Παράλληλα όμως αφομοιώνει τις γνώσεις και τις εμπειρίες των λαών της Μεσογείου, όπως π.χ. του πλοίου, το οποίο βουλιάζει όταν υπερφορτώνεται, ή του βουτηχτή που δένει πέτρες στα πόδια του για να πάει στο βυθό. Όλα αυτά τα μεταφέρει σε μαθηματική γλώσσα, δημιουργώντας την επιστήμη της υδροστατικής (*Οχουμένων Α', Β'*). Υποθέτει ότι ένα υγρό έχει τέτοια φυσική ιδιότητα ώστε από τα μέρη του, τα οποία βρίσκονται ομοιόμορφα διατεταγμένα και συνεχή, το ολιγότερο πιεζόμενο εξωθείται από το περισσότερο πιεζόμενο και κάθε ένα από τα μέρη του πιέζεται «κατά κάθετον» από το υγρό που βρίσκεται πάνω του.

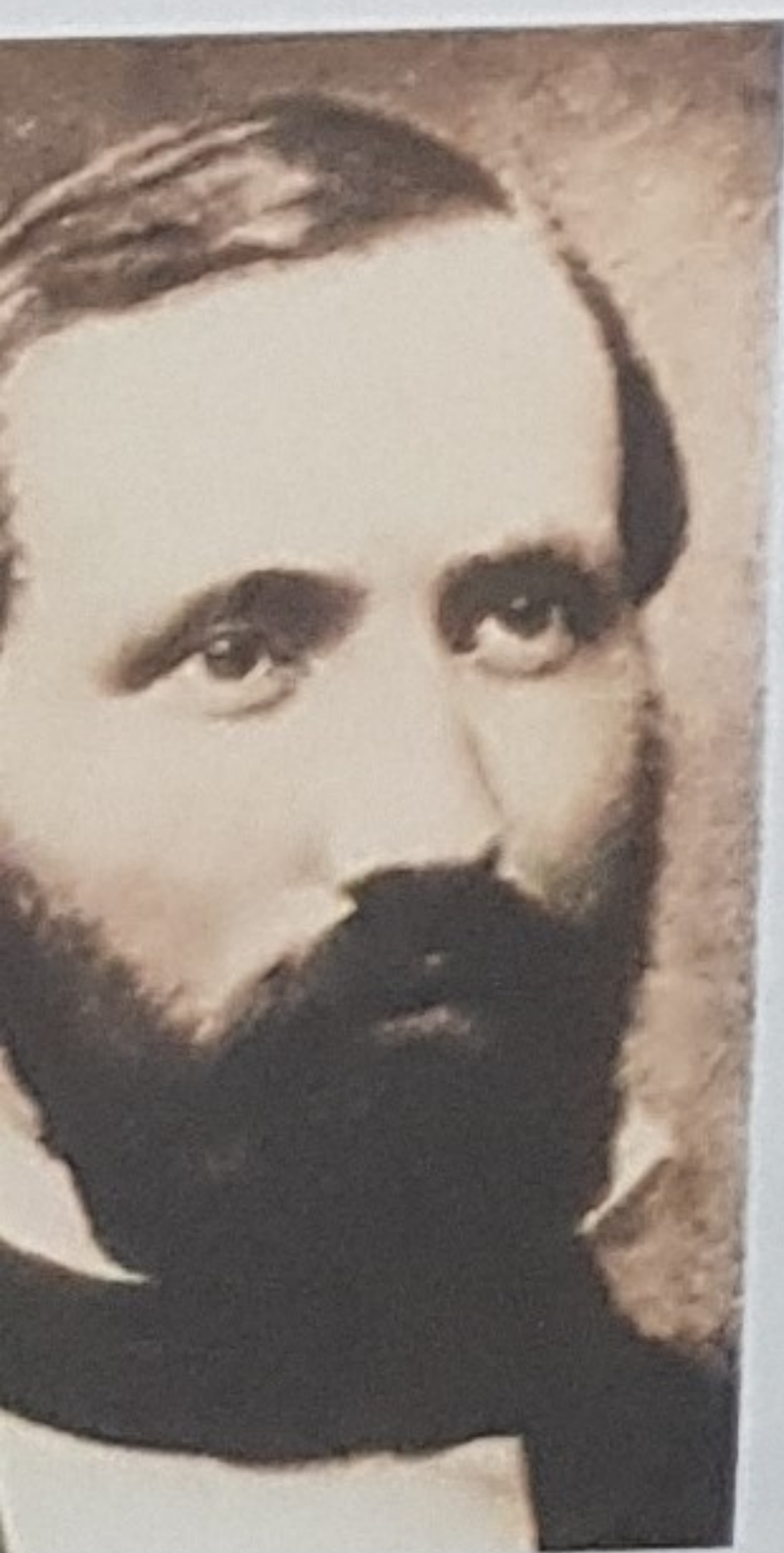
Με αυτή την πρώτη αρχή, ο Αρχιμήδης συμπεραίνει πρώτα πως η επιφάνεια ενός υγρού εν ηρεμία είναι σφαιρική και το κέντρο αυτής της σφαίρας συμπίπτει με το κέντρο της Γης. Μετά αποδεικνύει πως στερεά μεγέθη ισοβαρή με το υγρό, όταν αφεθούν σ' αυτό, θα βυθιστούν τόσο ώστε να μην εξέχουν από την επιφάνεια του υγρού και να μην κατεβούν προς τα κάτω. Τώρα είναι πια σε θέση να διατυπώσει δύο θεωρήματα της υδροστατικής. Τα ελαφρότερα του υγρού στερεά που βρίσκονται στο υγρό φέρονται με τόση δύναμη προς τα άνω²⁴ όσο

είναι το βάρος, ενώ τα βαρύτερα του υγρού στερεά φέρονται προς τα κάτω.

Χρησιμοποιώντας τη 2η αρχή του, ότι τα ευρισκόμενα στο υγρό σώματα, ωθούμενα προς τα άνω, διευθύνονται κατά την κατακόρυφον διερχομένη από το κέντρο βάρους τους, αποδεικνύει πως αν κάθε τμήμα σφαίρας, ελαφρότερο του υγρού, αφεθεί στο υγρό, η βάση του θα πάρει τέτοια θέση ισορροπίας ώστε ο άξονας του τμήματος να είναι κατακόρυφος.

Στο δεύτερο βιβλίο, ο Αρχιμήδης εφαρμόζει τις ίδιες αρχές στην ισορροπία τμήματος παραβολοειδούς εκ περιστροφής. Η δεξιοτεχνία του συγγραφέα σ' ένα καινούργιο θεωρητικό πρόβλημα προκαλεί τον αμέριστο θαυμασμό του αναγνώστη.

Στην καθαρά γεωμετρική πραγματεία του *Περί Ελίκων*, ο Αρχιμήδης εισάγει, πέρα από τα κλασικά γεωμετρικά μεγέθη, το μέγεθος του χρόνου (ήδη από την πρώτη πρόταση θεωρεί το χρόνο ως μέγεθος) και δίδει κινηματικό ορισμό της έλικας και της εφαπτομένης της. Και σ' αυτή την πραγματεία²⁵ ο μεγάλος μαθηματικός και πάλι πρωτοτυπεί, θέλοντας να αποδείξει πως το εμβαδόν της επιφάνειας που περιλαμβάνεται κάτω από την έλικα η οποία γράφεται κατά την πρώτη περιφορά ισούται με το 1/3 του πρώτου κύκλου. Επιλέγει όλο και μικρότερους κυκλικούς τομείς, ώστε η διαφορά ανάμεσα στο εμβαδόν που βρίσκεται κά-



Ο μεγάλος
Γερμανός
μαθηματικός
Riemann
συνέχισε το
ολοκλήρωμα του
Αρχιμήδη



Ο κρατήρας της σελήνης που φέρει το όνομα του Αρχιμήδη. Δίπλα, αναγεννησιακή γκραβούρα που απεικονίζει τον Αρχιμήδη να μελετά πολεμικές μηχανές για την άμυνα των Συρακουσών



Γκραβούρα με φανταστική αναπαράσταση του προσώπου του Αρχιμήδη

Η λογική των ανισοτήτων που χρησιμοποιήθηκε από τον Αρχιμήδη αποδείχθηκε ένα προφητικό μαθηματικό εργαλείο

τω από το τόξο της έλικας και στο άθροισμα του εμβαδού του πεπερασμένου πλήθους εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κυκλικών τομέων, να μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιοδήποτε δεδομένο μέγεθος.

Όμως πέρα από τη μεθοδικότητα, την άψογη τεχνική και την πληρότητα των συλλογισμών του, θα θέλαμε να υπογραμμίσουμε και το σημαντικό αποτέλεσμα που αναφέρει στον πρόλογο: αν μια ευθεία εφαπτεται της έλικας στο πέρας της και αν αχθεί άλλη ευθεία κάθετος στην περιαχθείσα και αποκατασταθείσα γραμμή στο παραμένον σταθερό άκρο της, ώστε να τμήσει την εφαπτομένη, τότε η αχθείσα κάθετος είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου.

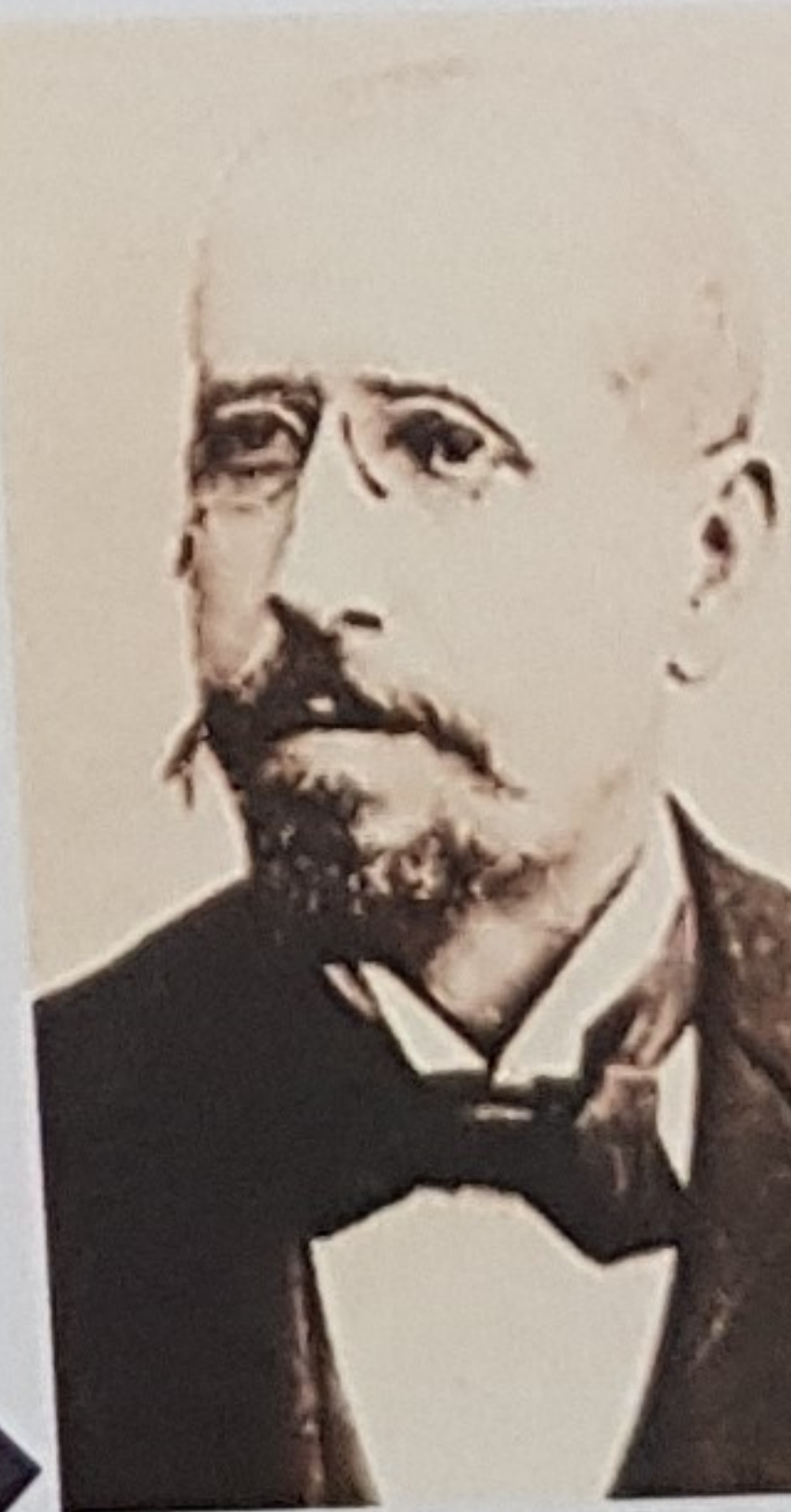
Ετσι μπορούμε να θεωρήσουμε πως η προαναφερθείσα πραγματεία συνδέεται με τις θεωρητικές έρευνες του έργου του *Κύκλου Μέτρησις* απ' όπου διασώθηκαν μόνο τρία θεωρήματα. Στο πρώτο αποδεικνύει ότι το εμβαδόν κάθε κύκλου ισούται με ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου η κάθετος είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η βάση με την περιφέρειά του. Στο δεύτερο θεώρημα αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν του κύκλου προς το τετράγωνο της διαμέτρου του έχει λόγον ίσον προς 11/14. Και στο 3ο το πιο ενδιαφέρον, γιατί περιέχει την αριθμητι-

κή προσέγγιση του π , αποδεικνύει, υπολογίζοντας προσεγγιστικά την περίμετρο δύο κανονικών πολυγώνων 96 πλευρών, το ένα εγγεγραμμένο και το άλλο περιγεγραμμένο στον κύκλο, πως ο λόγος της περιφέρειας κάθε κύκλου προς τη διάμετρό του (δηλαδή το π) είναι ο κιβωτισμός $3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$ πλησιέστερη προσέγγιση στη τιμή του $\pi \approx 3,14 \dots$

Η λογική των ανισοτήτων²⁶ που χρησιμοποιήθηκε από τον Αρχιμήδη αποδείχθηκε ένα προφητικό μαθηματικό εργαλείο. Με τη διαδικασία του κιβωτισμού και με απόλυτη αυστηρότητα προσφέρει την πλησιέστερη προσέγγιση στις αποδείξεις του. Η χρήση των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σχημάτων του επιτρέπει να αγγίξει με μια θαυμαστή τεχνική έννοιες-κλειδιά που χρησιμοποιήθηκαν από την Ανάλυση του 19ου αιώνα. Κατ' ευθείαν συνεχιστές του θα είναι ως προς το ορισμένο ολοκλήρωμα ο Ρίμαν (Riemann) και ο Νταρμπού (Darboux) και ως προς τον ορισμό μήκους τόξου ο Ζορντάν (Jordan).

Ο πυρήνας της γλώσσας των (ε, δ) «αξιοματικά» διατυπωμένος διαφαίνεται στα προηγούμενα έργα που αναφέραμε. Γι' αυτό δίκαια το 17ο αιώνα, ο οποίος διαμόρφωσε τον απειροστικό λογισμό, εκείνοι οι οποίοι άνοιξαν την «πραγματική βασιλική οδό»²⁷ θεωρούσαν τα έργα του Αρχιμήδη ιερά κείμενα, όπως ακριβώς τα εκκλησιαστικά. Οι αποδείξεις του Αρχιμήδη, δυνατές, απρόσβλητες από κά-

Ο μαθηματικός Jean Gaston Darboux



Ανάγλυφο του
17ου αιώνα με τη
μορφή του
Αρχιμήδη. Δίπλα,
προτομή του
Πλούταρχου.
Γνώστης των
μαθηματικών, ο
ίδιος περιγράφει
τον Αρχιμήδη ως
ον με βεβαί-
νη νοημοσύνη
(Αρχαιολογικό
Μουσείο Δελφών)

θε αριστοδύναμη, πείθουν με τους καθαρούς συλ-
λογισμούς του.

Η μη επιστημη εμφάνιση της έννοιας του ορίου
και η αποκασία μιας θεωρίας για το άθροισμα σει-
ρών πραγματικών αριθμών τόσο πλήρους όσο ε-
κείνης του τέλους του 19ου αιώνα δεν αποτελεί α-
νυπερβλτικό εμπόδιο για τον Αρχιμήδη. Είναι κα-
τορθώνει με μια εκπληκτική τεχνική να οικοδο-
μήσει ένα σύστημα αντιστοιχιών που του επιτρέπει
να φθάσει στο στόχο του.

Ο Πλούταρχος, ο οποίος σπούδασε μαθηματικά,²⁸
παραθέτει ένα διαχρονικό χαρακτηρισμό για την ε-
πιστημονική προσφορά του μεγάλου Συρακούσιου:

«Ο Αρχιμήδης όμως είχε τόσο μεγάλο φρόνημα
και τέτοιο βάθος ψυχής και τόσο πλούτο θεωρηκά-
των, ώστε για τα έργα, από τα οποία απέκτησε όνο-
μα και δόξα όχι ανθρώπινης αλλά κάποιας θείας
νοημοσύνης, δεν θέλησε να αφήσει σύγγραμμα,
αλλά επειδή θεωρούσε την απασχόληση στα μηχαν-
ικά καθώς και κάθε τέχνη που υπηρετεί τις ανά-
γκες της ζωής εξευτελιστική και βάνανση, σε κεί-
να μονάχα περιόριζε το ζήλο του, σε όσα υπάρχει το
“ωραίο” και το “τέλειο”, χωρίς να αναμειγνύεται το

«Δεν μπορούν να βρεθούν δυσκολότερες
θεμελιώδεις προτάσεις διατυπωμένες
απλούστερα από τη μέθοδο του Αρχιμήδη»

“αναγκαίο” και σε όσα, ενώ δεν μπορούν να συ-
γκριθούν με όλα τα άλλα, η ύλη βρίσκεται σε ά-
μιλλα με την απόδειξη, γιατί η μία δίνει την ομορ-
φιά και το μέγεθος και η άλλη την ακρίβεια και
την υπερφυσική δύναμη. Σε όλη τη γεωμετρία δεν
μπορούν να βρεθούν δυσκολότερες και βαθύτερες
θεμελιώδεις προτάσεις διατυπωμένες απλούστερα
και καθαρότερα από τη μέθοδο του Αρχιμήδη».²⁹

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Κατά τον Ποσειδώνιο σημαίνει αντρεωμένος. Βλ.
Πλούταρχου *Βίοι Παράλληλοι*. Πελοπίδας – Μάρκελλος.
2. «Αρχιμήδης μηχανικός εγνωρίζεται», Πασχάλιον
Χρονικόν tom. 32 colum. 432 (175).
3. Μάλιστα ο Πλούταρχος αναφέρει πως ο Μάρκελλος
ειρωνεύόμενος τους τεχνίτες και τους μηχανικούς του
έλεγε: «Δεν θα πάψουμε να πολεμούμε με αυτόν το



γεωμετρικό Βριάρεω (έναν από τους τρεις Εκατόχειρες)
που τα πλοία μας τα βυθίζει σαν ποτήρια στη θάλασσα,
και παίζοντας τα πετάει καταντροπασμένα και ξεπερνάει
τους μυθικούς εκατόχειρας, ρίχνοντας εναντίον μας τόσα
βέλη συγχρόνως;», Πλούταρχος ο.ε. XVII, μετάφραση Α.
Λαζάρου, εκδ. Ι. Ζαχαρόπουλου. Βλ. ακόμα Ε. Σταμάτη,
Μηχανικά επιτεύγματα του Αρχιμήδους. Περιοδικό.
Θέματα Σύγχρονης Τεχνολογίας. Ιούνιος – Ιούλιος.
Αθήνα 1971 σελ. 40-48.

4. Ο καθηγητής Ε. Σταμάτης, έπειτα από πολυετείς κόπους
και προσπάθειες (αναζητούσε φωτοτυπίες έργων του
Αρχιμήδη σε βιβλιοθήκες της Μ. Ανατολής και των
Ινδιών), μπόρεσε να εκδώσει με τη βοήθεια του Τεχνικού
Επιμελητηρίου της Ελλάδος τα *Απαντα του Αρχιμήδη*
(αρχαίο κείμενο, μετάφραση, σχόλια) τόμ. Α', 2 μέρη,
1970, τόμ. Β', 1973, τόμ. Γ', 1974. Ο άθλος αυτός του Ε.
Σταμάτη, ο οποίος εργαζόταν ηρωικά, χωρίς να κατέχει
πανεπιστημιακή θέση, αποτελεί μια εξαιρετικά πολύτιμη
προσφορά, καθώς είναι η πληρέστερη απ' όλες τις
υπάρχουσες εκδόσεις των έργων του Αρχιμήδη.

5. Πολυβίου, *Ιστορία* viii 7, 8.

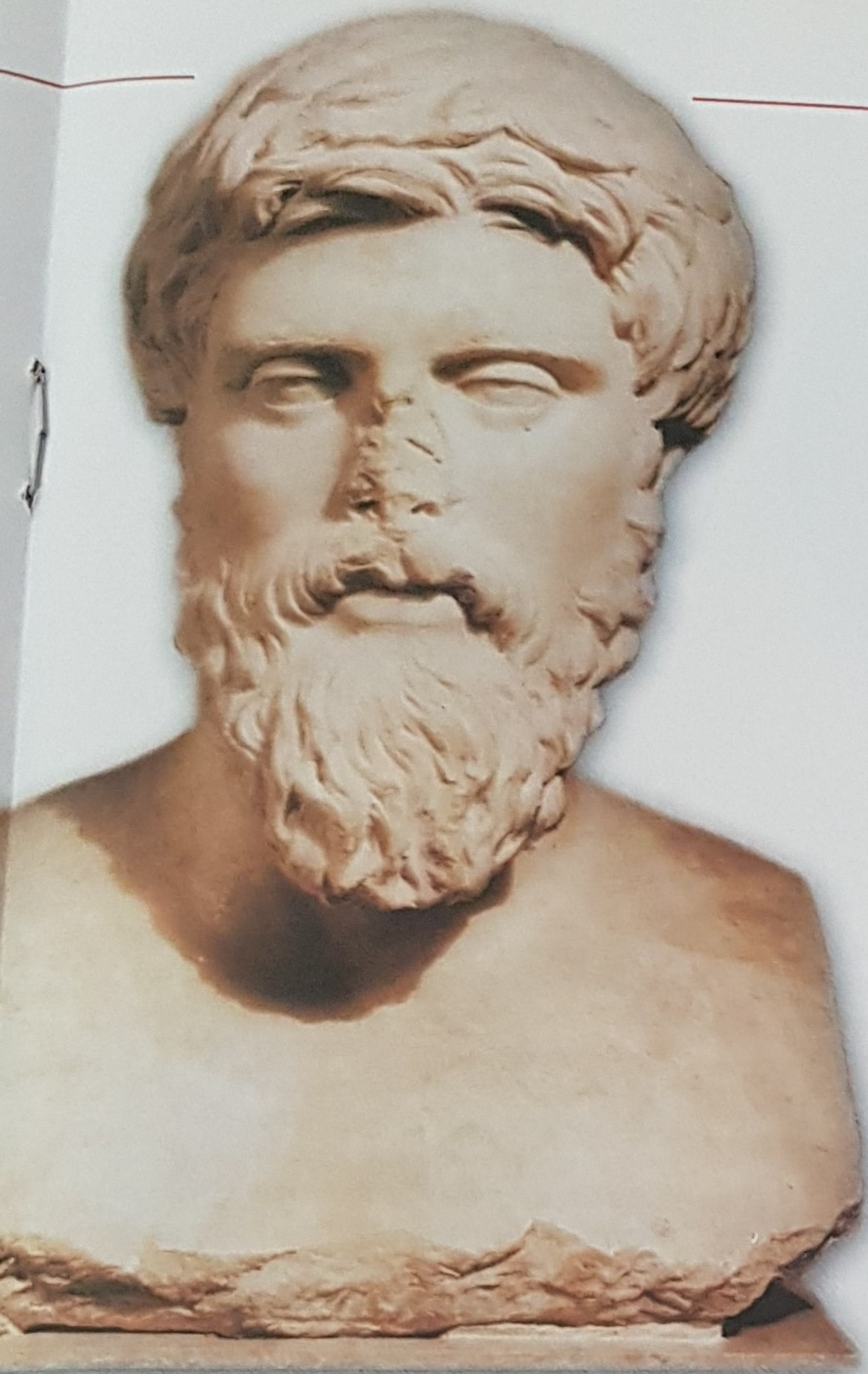
6. Ι. Τζέτζης, *Χιλιάδες* ii 35. 135.

7. Βλ. Χ. Φίλη, «Πυθαγόρας, Αρχιμήδης και ινδικές
μαθηματικές θεωρίες». *Φιλοσοφία*. Ακαδημία Αθηνών.
Επετηρίς του Κέντρου Ερεύννης της Ελληνικής
Φιλοσοφίας. Αθήνα 1985-86, σελ. 156-171.

8. Διοδώρου Σικελιώτου, *Ιστορία* I. 34.

9. Λεπτομερής περιγραφή του κοκλίου διασώζεται από τον





Βιτρούβιο, *Περί Αρχιτεκτονικής*, X Κεφ. VI,1.

10. Γαλνός, Λουκιανός (2ος μ., X.), Δίων Κάσσιος (2ος - 3ος μ.Χ.), Ανθέμιος (6ος μ.Χ.), Ψελλός (11ος μ.Χ.), Τζέτζης (12ος μ.Χ.), Ζωναράς (12ος μ.Χ.), Ευστάθιος (12ος μ.Χ.).

11. P. Thuillier, «Ένα αίνιγμα: Ο Αρχιμήδης και τα καυστικά κάτοπτρα». *La Recherche* No 100. Μάιος 1979.

12. *Ενημερωτικό Δελτίο Τ.Ε.Ε.* 17/11/1973· *Τεχνικά Χρονικά* Σεπτ. 1973, σελ. 771-779. Βλ. ακόμα M. Modiano, *New York Times*, Nov. 11. 1973.

13. Μάλιστα ο Ε. Σταμάτης, στη μελέτη του *Τα καυστικά κάτοπτρα του Αρχιμήδους*, Αθήνα 1982, αναφέρει πως το 1492 υπήρχε στη βιβλιοθήκη του Γ. Βάλλα στη Βενετία το βιβλίο του Αρχιμήδη *Περί κατόπτρων*, το οποίο από τότε έχει χαθεί (βλ. και Ε. Hoppe, *Ιστορία της Φυσικής*, Braunschweig 1926, σελ. 240.2)

14. Στο 6ο και το 7ο θεώρημα αποδεικνύεται ο περίφημος νόμος των μοχλών: τα εξαρτώμενα εις τα άκρα του μοχλού βάρη είναι αντιστρόφως ανάλογα των μοχλοβραχιόνων.

15. Στο 14ο θεώρημα αποδεικνύεται ότι το κ.β. κάθε τριγώνου βρίσκεται στο σημείο τομής των διαμέσων του.

16. Το 17ο αιώνα ο παλός Cavalieri θα χρησιμοποιήσει τα αδιαίρετα, προετοιμάζοντας το έδαφος για τη δημιουργία του απειροστικού λογισμού, χωρίς την αυστηρότητα του Αρχιμήδη.

17. Η συστηματική μελέτη των θεωριών αυτών κατά τους 16ο-17ο αιώνες έδωσε ώθηση τόσο στην «προδημιουργία»

του απειροστικού λογισμού όσο και στην κατασκευή των επιβλητικών μνησολιπικών ναών στην Ευρώπη, αν και χειρόγραφα των έργων του ήταν ήδη γνωστά από την εποχή των Αράβων. Θυμίζουμε πως τα έργα του Αρχιμήδη και τα σχόλια του Ευτόκιου μελέτησαν οι αρχιτέκτονες της Αγίας Σοφίας Ισίδωρος και Ανθέμιος.

18. Ο τίτλος αυτός έχει δοθεί από μεταγενέστερους. Ο Αρχιμήδης είχε δώσει τον τίτλο: *Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής*.

19. Χρησιμοποιώντας σύγχρονη γλώσσα, θα λέγαμε ότι στο 2ο Βιβλίο αυτής της πραγματείας αναφέρεται στη γενική εξίσωση 3ου βαθμού. Βλ. και το άρθρο της I. G. Bachmakova, όπου διακρίνει διαφορετικές μεθόδους για τον προσδιορισμό των ακρότατων. *Οι μέθοδοι διαφόρισης του Αρχιμήδη*, Arch. for History of Exact Sciences, τόμ. 2, τεύχος 2, 1964, σελ. 87-107.

20. Ο καθηγητής Ε. Σταμάτης θεωρεί πως οι κατά καιρούς αντιγραφείς μετέβαλαν τη λέξη *όροι*, που σημαίνει ορισμοί, σε αξιώματα, Ε. Σταμάτη, *Η Ελληνική Επιστήμη*. Αθήνα 1968, σελ. 142.

21. Όταν το 1899 ο D. Hilbert παρουσιάζει το μνημειώδες έργο του *Αρχές της Γεωμετρίας*, η 5η ομάδα αξιωμάτων του (αξιώματα συνεχείας) αρχίζει με το αξίωμα του Αρχιμήδη· η παράλειψή του οδηγεί σε μη-αρχιμήδειες γεωμετρίες.

22. Το αξίωμα αυτό είναι ισοδύναμο με αυτό που συναντούμε στα Στοιχεία του Ευκλείδη, Βιβλ. V, ορισμός 4 και που αποδίδεται στον Εύδοξο.

23. Πλουτάρχου, ο.ε., 17. Το 75 π.Χ. ο Κικέρων οδηγούμενος από αυτή την παράσταση ανακάλυψε τον τάφο του «πιοτερο θεϊκού παρά ανθρώπινου πνεύματος» (Baldi, *Chronica* p. 26). Βλ. Ciceron, *Tusculan Disputationes* (V, xxiii 64-66).

24. Ο Βιτρούβιος στο έργο του *Περί Αρχιτεκτονικής* (βιβλίο IX, κεφ. 3) αναφέρει το νόμο της ανώσεως στη Φυσική και την αποκαλυφθείσα νοθεία του χρυσού στεφάνου χάρη σ' αυτόν το νόμο.

25. Η καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Lomonosov της Μόσχας (βραβείο Kouré 2001) I. G. Bachmakova, στο προαναφερθέν άρθρο της παρουσιάζει τις διαφορετικές μεθόδους που χρησιμοποιεί ο Αρχιμήδης για τον προσδιορισμό των εφαπτομένων.

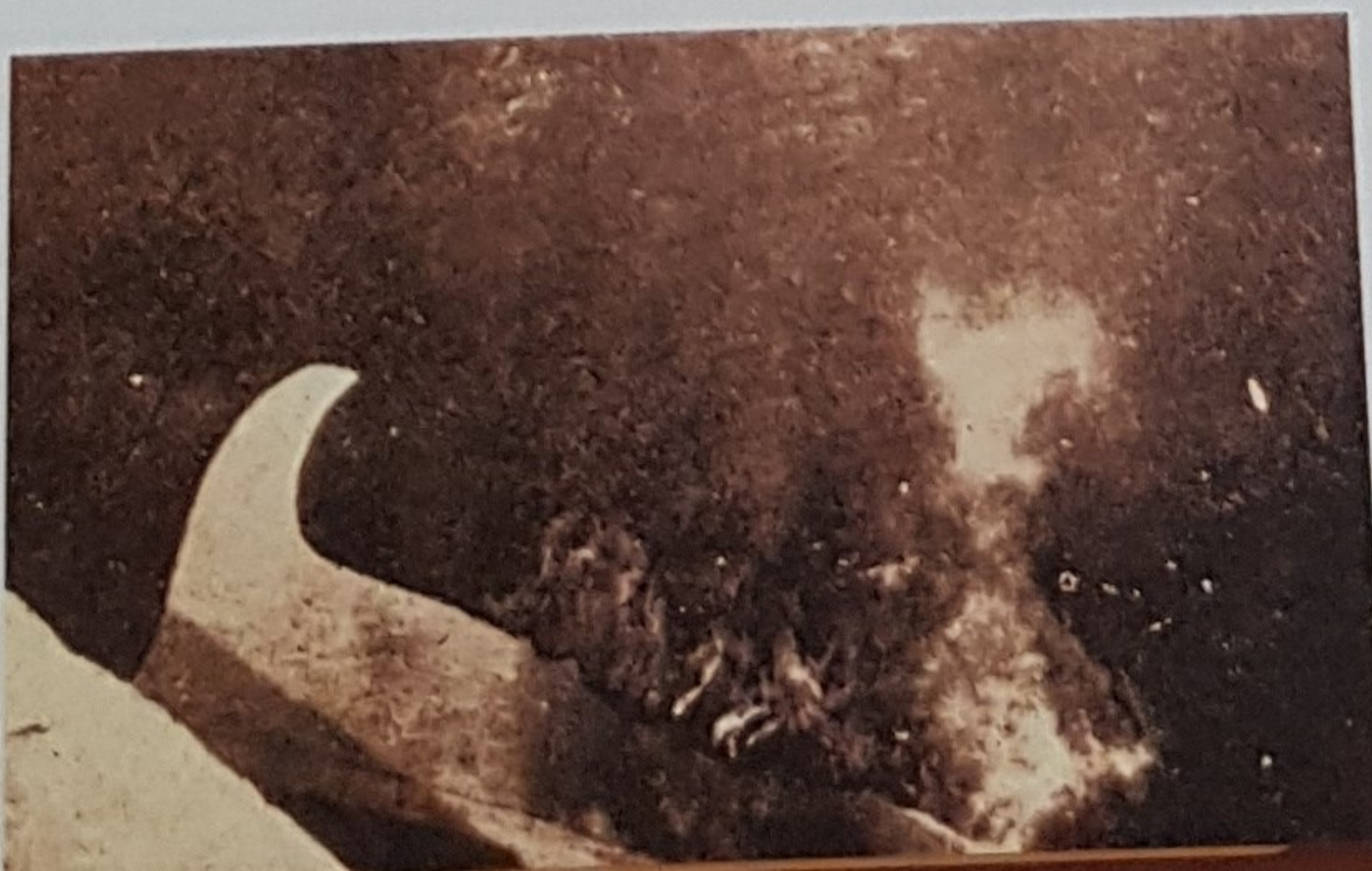
26. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Χ. Φίλη, *Από τη Λογική των ανισοτήτων στην άλγεβρα των ανισοτήτων: Αρχιμήδης και Lagrange, οι δύο εκπρόσωποι*. Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας. Επιμ. Δ. Αναπολιάνος-Β. Καρασμάνης. Εκδόσεις Τροχαλία. Αθήνα 1993, σελ. 219-242

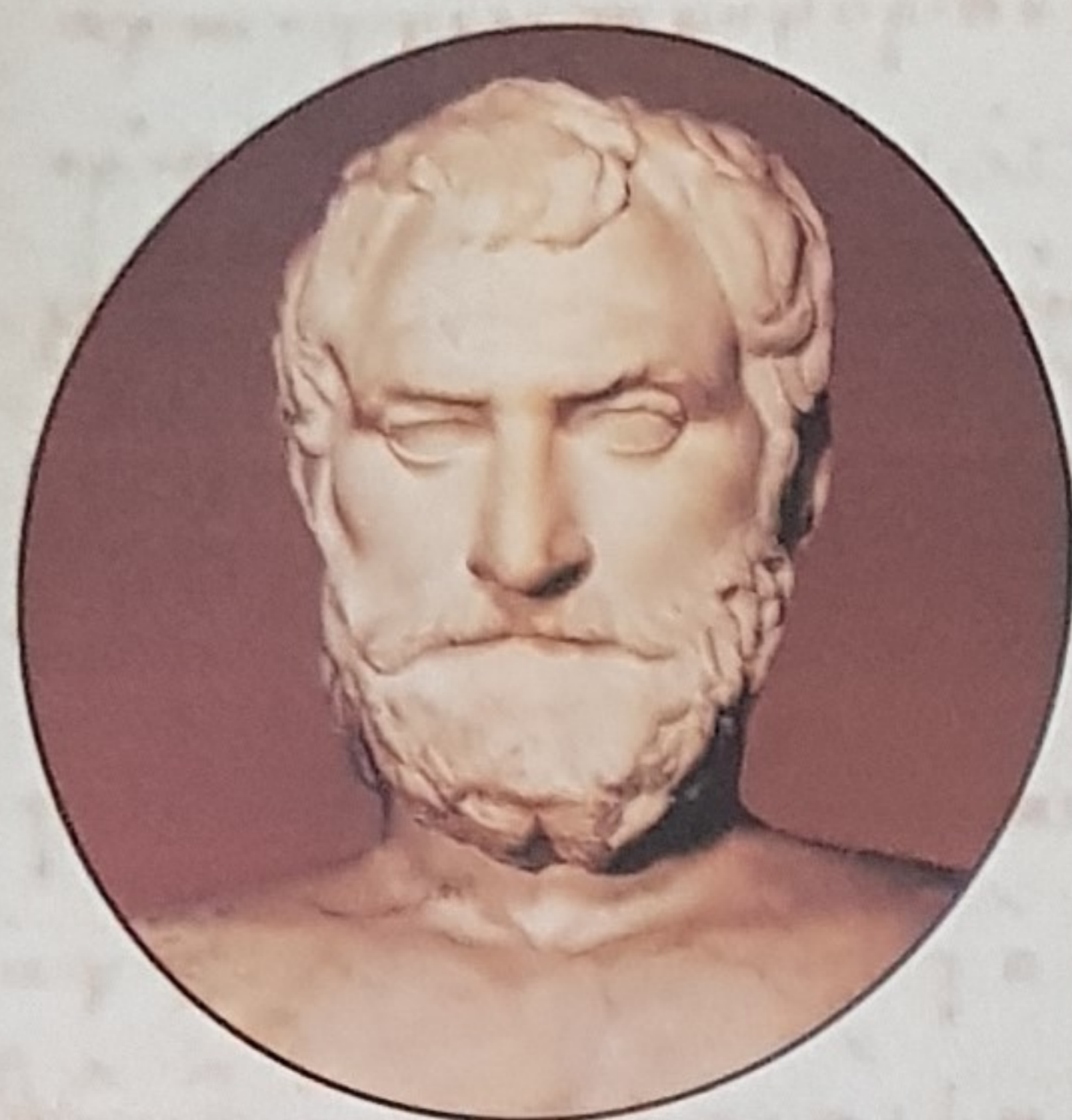
27. Είναι η έκφραση την οποία χρησιμοποιεί ο Torricelli (1644) στη μέθοδο του Cavalieri, βλ. *De dimensione parabolae*. Opera geometrica, Firenze p. 56.

28. Πλούταρχος, *Περί του ΕΙ του εν Δελφοίς*, 387 Ε.

29. Πλουτάρχου, ο.ε., 17.

Κάτω, αριστερά και δεξιά, φωτογραφίες από το πείραμα (24-6-1973) του Ιωάννου Σακκά για να αποδείξει ότι ήταν δυνατή η με κάτοπτρα πυρπόληση του ρωμαϊκού στόλου από τον Αρχιμήδη





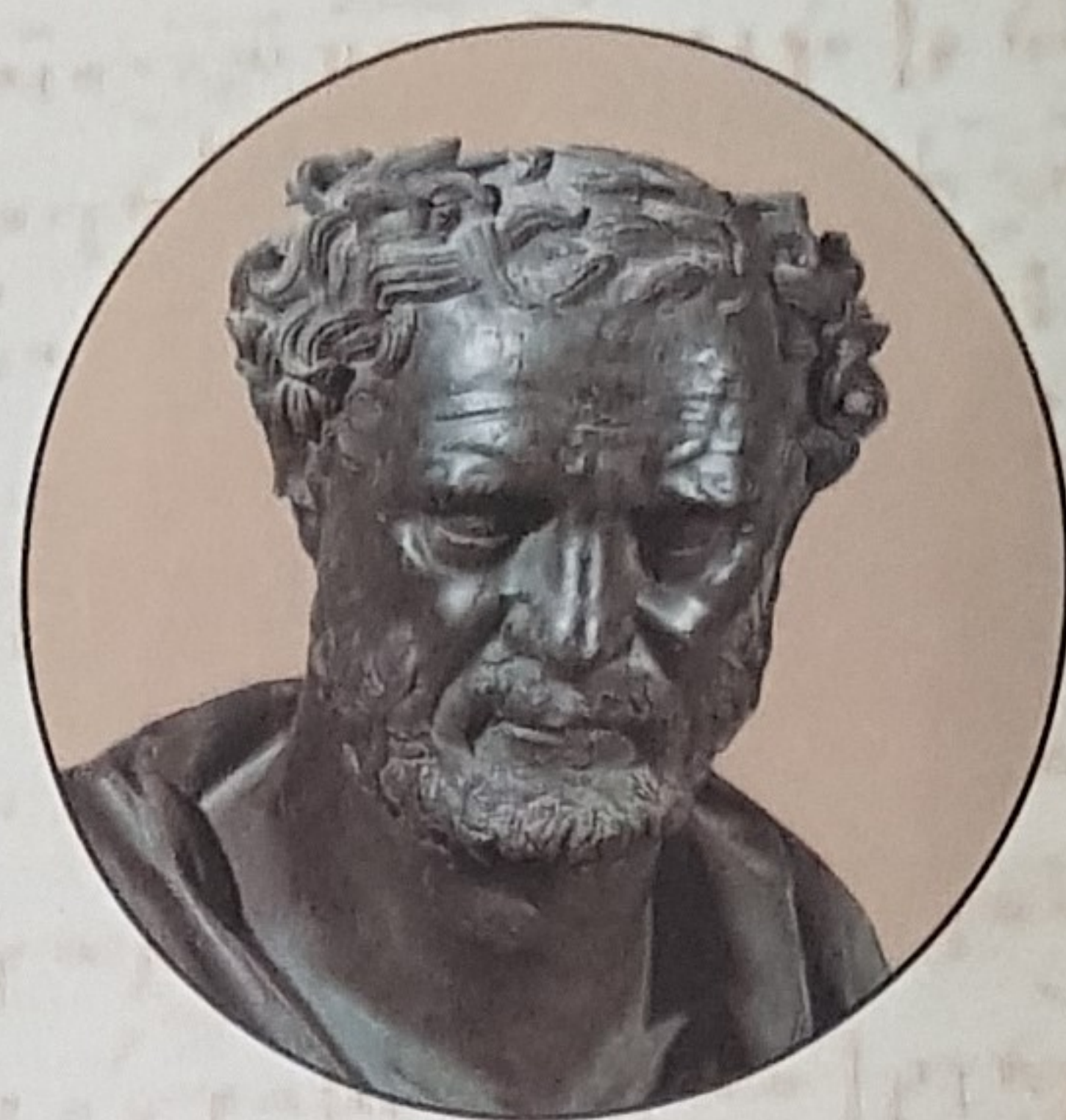
Θαλής ο Μιλήσιος
(624-546 π.Χ.)

Μαθηματικός και φιλόσοφος, από τους πρώτους της ιστορίας. Ανήκει στους φυσικούς φιλοσόφους, αυτούς δηλαδή που έψαχναν να βρουν την πρώτη ύλη του κόσμου και την αιτία που τον γεννά. Είναι επίσης ένας από τους εφτά σοφούς της αρχαιότητας. Γεννήθηκε στη Μίλητο και ήταν αυτοδίδακτος. Ταξίδεψε στην Αίγυπτο, όπου γνώρισε τους εκεί σοφούς και μελέτησε μαθηματικά, γεωμετρία και αστρονομία. Εκεί λέγεται πως υπολόγισε ακριβώς το ύψος της πυραμίδας του Χέοπα, μετρώντας το μήκος της σκιάς της όταν ο Ήλιος βρίσκεται στο ζενίθ. Πρόβλεψε μια έκλειψη Ηλίου προκαλώντας το θαυμασμό των συγχρόνων του το 585. Επίσης θεωρείται ο πρωτοπόρος της ανακάλυψης του ηλεκτρισμού, γιατί παρατήρησε πως όταν το ήλεκτρο (το κεκριμπάρι δηλαδή) τρίβεται, αποκτά την ιδιότητα να τραβά προς το μέρος του μικρά αντικείμενα, όπως μαλλί, τρίχες κ.λπ. Ο Θαλής θεωρείται ο ιδρυτής της Ιωνικής σχολής, ο πρώτος που δίδαξε την επιστημονική σκέψη διαχωρίζοντας τη φιλοσοφία από τη θρησκεία και ερμηνεύοντας τον κόσμο και τα φαινόμενά του με τη λογική. Θεωρούσε πως ο κόσμος προέρχεται από το νερό. Σ' αυτόν αποδίδονται πολλά γνωμικά, όπως το περίφημο «Γνώθι σαυτόν», που και ο Σωκράτης θεωρούσε πως είναι η σημαντικότερη φιλοσοφική ιδέα. Η μεγάλη αξία του Θαλή είναι ότι, χωρίς πειραματική βοήθεια, θεμελίωσε θεωρητικά επιστημονικούς συλλογισμούς, ανοίγοντας έτσι το δρόμο στη συγκρότηση της επιστημονικής σκέψης.



Πυθαγόρας
(580-500 π.Χ.)

Μεγάλος φιλόσοφος, μαθηματικός και μουσικός της αρχαιότητας. Γεννήθηκε στη Σάμο και διδάχθηκε τη φιλοσοφία από τους μεγαλύτερους φιλόσοφους της εποχής του, όπως τον Θαλή και τον Αναξίμανδρο. Συμπλήρωσε τη μόρφωσή του ταξιδεύοντας σε πολλές χώρες, όπως την Αίγυπτο, τη Βαβυλώνα, την Περσία. Περιπλανήθηκε στη Δήλο, την Κρήτη και τους Δελφούς και κατέληξε στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας, όπου ίδρυσε σχολή. Οι αρχές της πόλης, επειδή ο Πυθαγόρας ήταν εναντίον της δουλείας, τον παρέπεμψαν σε δίκη όπου αθώωθηκε, αλλά οι διώξεις εναντίον του δεν σταμάτησαν. Λέγεται μάλιστα πως σκοτώθηκε, γύρω στα 500 π.Χ., όταν οι αντίπαλοί του έκαψαν τη σχολή του και ο ίδιος κάπκε μαζί με αρκετούς μαθητές του. Όσο ζούσε ακόμη ο φιλόσοφος, παραρτήματα της σχολής του είχαν ιδρυθεί σε διάφορες πόλεις της Μεγάλης Ελλάδας και οι μαθητές του, που λέγονταν Πυθαγόρειοι, έπρεπε να ακολουθούν συγκεκριμένους κανόνες, ζώντας αυτό που ονομάστηκε Πυθαγόρειος βίος. Οι Πυθαγόρειοι ήταν αντίθετοι στη βία, έτρωγαν κοινά με τους δασκάλους και τους συμμαθητές τους και η διαίτα ήταν αυστηρά χορτοφαγική. Ανώτερο τύπο ζωής θεωρούσε τη ζωή του στοχασμού και της σκέψης, το «θεωρητικό βίο» όπως έλεγε. Το όνομά του συνδέθηκε με τη μελέτη των αριθμών, της αστρονομίας και της μουσικής. Διάσημο έμεινε τέλος και το «Πυθαγόρειο θεώρημα» στη γεωμετρία.



Δημόκριτος
(460-370 π.Χ.)

Φιλόσοφος της αρχαίας εποχής, ο πατέρας της ατομικής θεωρίας και σπουδαίος μαθηματικός. Γεννήθηκε στα Αβδηρα. Πολυταξιδεμένος, έφθασε μέχρι τις Ινδίες, όπου μελέτησε τα ανατολικά φιλοσοφικά ρεύματα. Ο Δημόκριτος ενδιαφερόταν να μάθει κυρίως την αιτία των φυσικών φαινομένων. Υποστήριζε ότι όλα τα υλικά σώματα αποτελούνται από άτομα, που είναι τα μικρότερα σωματίδια στα οποία μπορεί να διασπαστεί η ύλη, όπως λέει και το όνομα αυτών των σωματιδίων. Πράγματι, άτομο σημαίνει αυτό που δεν γίνεται μικρότερο. Τα άτομα κινούνται ελεύθερα στον κενό χώρο, μπορούν να έλκονται ή να απωθούνται και με τους διάφορους συνδυασμούς τους σχηματίζουν τις διάφορες μορφές του υλικού κόσμου. Σαν συνέπεια, ο θάνατος είναι αποτέλεσμα της φθοράς των ατόμων και του διαχωρισμού τους. Στο χώρο των μαθηματικών η συμβολή του Δημόκριτου υπήρξε καθοριστική. Ο Αρχιμήδης υπήρξε μελετητής σπουδαίος του έργου του και απ' αυτόν έχουμε τη μαρτυρία για τη διατύπωση του δημοκρίτειου ερωτήματος σχετικά με τους όγκους του πρίσματος, του κώνου, του κυλίνδρου και της πυραμίδας. Το ερώτημα του Δημόκριτου αποτελεί την πρώτη σύλληψη της έννοιας των απειροστών στην ιστορία των μαθηματικών. Ο Δημόκριτος, εκτός από την ηθική, τη φιλοσοφία και τα μαθηματικά, ασχολήθηκε επίσης με την ιατρική και τη ζωγραφική.



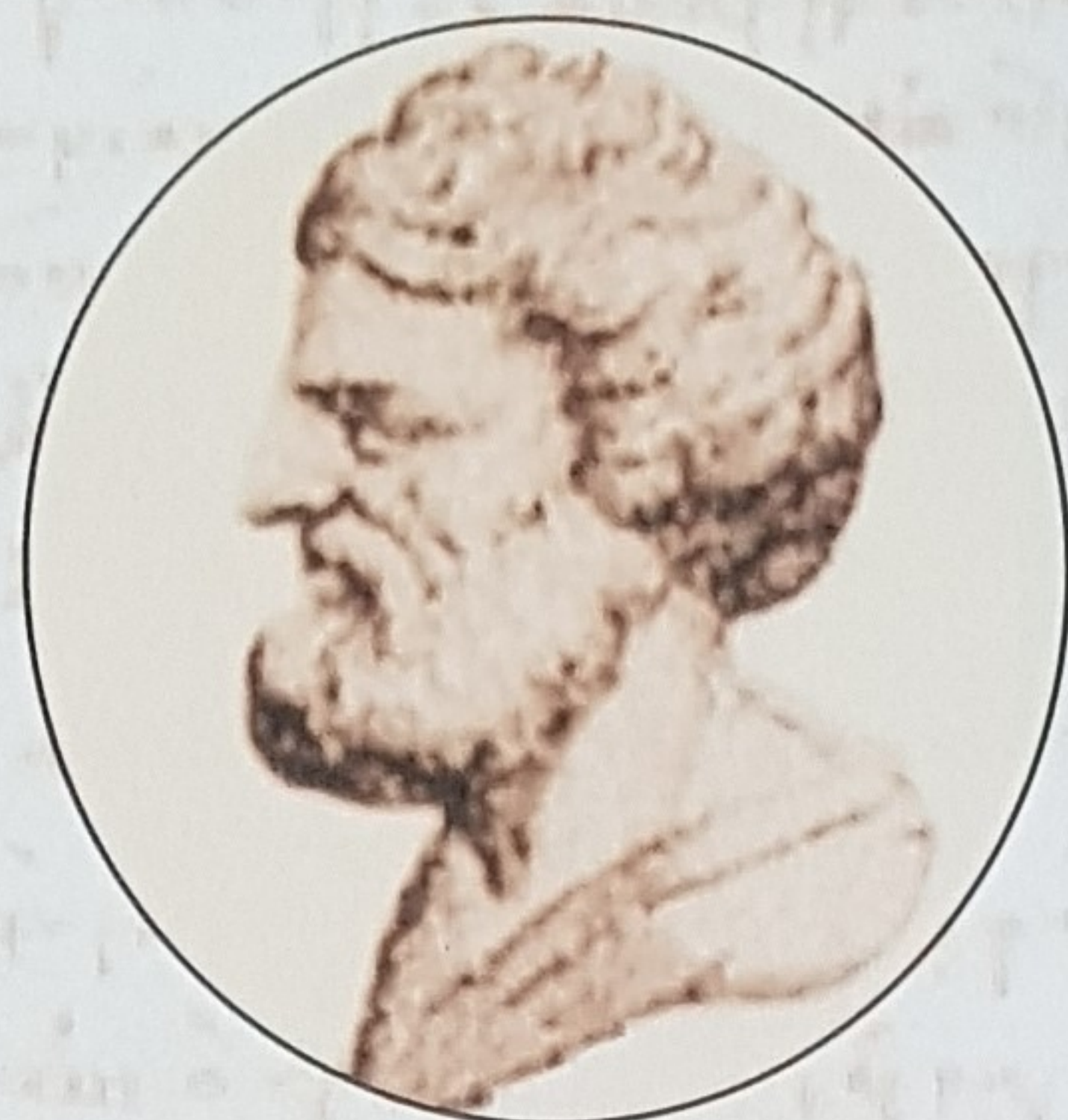
Ευκλείδης
(325;-265 π.Χ.)

Έλληνας μαθηματικός, θεμελιωτής της γεωμετρίας. Για τη ζωή του δεν είναι γνωστά πολλά, αλλά φαίνεται να έζησε στην Αλεξάνδρεια στην εποχή του Πτολεμαίου Α', ο οποίος τον τιμούσε ιδιαίτερα. Ο Πρόκλος αναφέρει πως κάποτε ο Πτολεμαίος ρώτησε τον Ευκλείδη αν υπάρχει τρόπος να μάθει τη γεωμετρία συντομότερα, από το να μελετήσει το βιβλίο του, και αυτός του απάντησε το περίφημο «Μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν» (δεν υπάρχει βασιλική οδός προς τη γεωμετρία). Το μνημειώδες έργο του «Στοιχεία», το οποίο αποτελείται από 13 βιβλία, είναι το πρώτο παράδειγμα αξιωματικής θεμελίωσης ενός επιστημονικού κλάδου, και μάλιστα με τρόπο υποδειγματικό. Σ' αυτό ο Ευκλείδης εξέδωσε ό,τι παρήγαγε η ελληνική επιστήμη στη γεωμετρία και τη θεωρία των αριθμών επί σειρά αιώνων, με αυστηρή και συστηματική διατύπωση. Ο Πρόκλος αναφέρει πως «ο Ευκλείδης, ο οποίος συνήθρισε τα Στοιχεία και πολλά μεν παραχθέντα υπό του Θεαιτήτου απετελείωσε, προσέτι δε μερικά εκ των πρώτων θεωρημάτων, τα οποία δεν είχαν αυστηρές αποδείξεις, διετύπωσε με αδιάσειστες αποδείξεις». Εγγραψε και πολλά άλλα έργα, όπως «Οπτικά», «Πορίσματα», «Περί κωνικών τομών», «Κατοπτρικά». Πέθανε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου.



Αρχιμήδης
(287-212 π.Χ.)

Μεγάλος Έλληνας μαθηματικός, φυσικός και χημικός. Γεννήθηκε στις Συρακούσες. Ανακάλυψε τις τροχαλίες και τους μοχλούς («Δος μου μέρος να σταθώ και θα κινήσω τη Γη»), αποδεικνύοντας ότι χρησιμοποιώντας ελάχιστη δύναμη είναι δυνατό να μετακινήσουμε πολύ βαριά αντικείμενα. Διατύπωσε τους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης του φωτός, ενώ ανακάλυψε και δύο αστρονομικά όργανα. Άλλη ανακάλυψή του είναι η αρχή της υδροστατικής άνωσης, που πήρε το όνομά του, σύμφωνα με την οποία, αν ένα στερεό σώμα ισορροπήσει στο υγρό, δέχεται μια δύναμη που λέγεται άνωση και είναι ίση με το βάρος του υγρού που εκτοπίζει. Λένε πως την ανακάλυψη αυτή την έκανε στο μπάνιο και από τη χαρά του βγήκε στους δρόμους γυμνός φωνάζοντας «Εύρηκα». Όταν οι Ρωμαίοι πολιορκήσαν τις Συρακούσες, ο Αρχιμήδης βοήθησε με τις εφευρέσεις του τους συμπατριώτες του να αμυνθούν στις ανώτερες ρωμαϊκές δυνάμεις, συγκεντρώνοντας τις ακτίνες του Ηλιου πάνω σε κοίλα κάτοπτρα ή κατασκευάζοντας μεγάλους γάντζους που κατέστρεφαν τα ρωμαϊκά πλοία. Ο Πλούταρχος αναφέρει πως ο Αρχιμήδης κατασκεύασε κι άλλες πολεμικές μηχανές, η φήμη του απλώθηκε τόσο πολύ, ώστε τον θεωρούσαν σχεδόν θαυματοποιό. Σκοτώθηκε από Ρωμαίο στρατιώτη με την πτώση των Συρακουσών το 212, όταν είπε προς αυτόν το περίφημο «Μη μου τους κύκλους τάραττε». Σώθηκαν έργα του, σε ελληνική γλώσσα ή σε αραβική μετάφραση: «Περί σφαίρας και κυλίνδρου», «Περί ελίκων», «Μέτρησης του κύκλου» και «Ισορροπίες επιπέδων».



Απολλώνιος ο Περγαίος
(262-180 π.Χ.)

Έλληνας μαθηματικός της αρχαιότητας, που γεννήθηκε στην Πέργη της Παμφυλίας και έζησε στην Αίγυπτο. Μαζί με τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη αποτελεί τη λαμπρή τριάδα της ελληνικής μαθηματικής σκέψης. Ο Απολλώνιος ήταν γνωστός ως «ο μέγας γεωμέτρης». Για τη ζωή του γνωρίζουμε ελάχιστα πράγματα, οι εργασίες του όμως άσκησαν μεγάλη επίδραση στην ανάπτυξη των μαθηματικών, ιδιαίτερα το έργο του «Κωνικά», η περίφημη πραγματεία του για τις κωνικές τομές. Το έργο αυτό αποτελούνταν από 8 βιβλία από τα οποία διασώθηκαν 4 στην ελληνική και 3 σε αραβική μετάφραση. Αραβική επιτομή του έργου του έχουμε το 13ο αιώνα από τον Νασίρ Εδίν, ενώ στην Ευρώπη το έργο του γίνεται γνωστό στα μέσα του 17ου αιώνα. Δίδαξε στην Αλεξάνδρεια και την Πέργαμο. Λέγεται ότι ήταν ως χαρακτήρας εγωιστής και υπερόπτης. Είναι αξιοθαύμαστο το γεγονός ότι, παρ' όλο που ο Απολλώνιος εργάστηκε με στοιχειώδεις γεωμετρικές μεθόδους και χωρίς γνώσεις άλγεβρας, παρήγαγε για τις κωνικές τομές εξισώσεις ταυτόσημες με αυτές της αναλυτικής γεωμετρίας. Με άλλα λόγια, οι Καρτεσιανές εξισώσεις της σύγχρονης γεωμετρίας παράγονται από τα συμπεράσματα του Απολλωνίου. Πέθανε στην Αλεξάνδρεια.

Ε

του ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ ΣΠΑΝΔΑΓΟΥ
μαθηματικού-συγγραφέα-εκδότη

ίναι αναμφισβήτητο το γεγονός ότι οι γυναίκες έπαιξαν πάντα ουσιαστικό ρόλο στην πορεία της γεννήσεως, της εξελίξεως και της αναπτύξεως της επιστήμης.

Εμείς όμως θεωρούμε την ιστορία της επιστήμης ως ιστορία μόνον των ανδρών. Και μάλιστα ιστορία λίγων ανδρών, π.χ. του **Αριστοτέλους**, του **Πλάτωνα**, του **Πυθαγόρα**, του **Γαλιλέου**, του **Νεύτωνα**, του **Λαγκράνζ**, του **Καραθεοδωρή**. Ανδρών που αναμφισβήτητα άλλαξαν κατά τρόπο ριζικό την άποψή μας και τις γνώσεις μας για το κάθε τι. Η ιστορία, ωστόσο, της επιστήμης, όπως τώρα γνωρίζουμε, είναι μια ιστορία όχι λίγων ανδρών, αλλά χιλιάδων ανθρώπων οι οποίοι συνεισέφεραν στη γνώση και στις θεωρίες της κάθε εποχής. Πολλοί δε από τους ανθρώπους αυτούς ήταν γυναίκες των οποίων δυστυχώς η ιστορία παραμένει ουσιαστικά άγνωστη. Αυτό οφείλεται, κατά ένα μεγάλο ποσοστό, στη στάση των αρχαίων κοινωνιών προς «*τας πεπαιδευμένας γυναίκας*» και κατά ένα μικρότερο στην καταστροφή διαφόρων ιστορικών μαρτυριών. Όταν διατρέξει κάποιος τις σελίδες της Ιστορίας του πολιτισμού, διαπιστώνει ότι έχει να κάνει μ' έναν κόσμο χωρίς γυναίκες. Αντιμετωπίζει έναν κόσμο φτιαγμένο από άνδρες που γράφουν και διηγούνται κατορθώματα ανδρών. Κάπου κάπου, δε, βλέπει να ξεπροβάλλει μια φιγούρα από το πουθενά. Βλέπει να εμφανίζεται η διαφορετική γυναίκα. Ποιήτρια ή συγγραφέας, πολιτικός ή επιστήμονας, φιλόσοφος ή καλλιτέχνης, είναι πάντα η διαφορετική γυναίκα. Η διεφθαρμένη, η ανώμαλη, η περίεργη που ξέφυγε από την κλασική εικόνα της γυναίκας-νοικοκυράς, της γυναίκας-συζύγου, της γυναίκας-μητέρας. Και η άγνωστη ιστορία των γυναικών στην επιστήμη ξεκινά από την προϊστορική εποχή και φτάνει ως την τελευταία 10ετία του 19ου αιώνα, όταν οι εργασίες της **Μαρίας Κιουρί** δεν αλλάζουν μόνο τις γνώσεις μας για τη σύσταση της ύλης, αλλά αλλάζουν και τη θέση των γυναικών επιστημόνων στην κοινωνία.

Τα περί ανδροκρατούμενης κοινωνίας, φυσικά, ισχύουν και στον ευρύτερο αρχαίο ελλαδικό χώρο. Εδώ, όμως, έχουμε και μια άλλη αιτία που συνετέ-



λεσε ώστε να στερηθούν οι επόμενες γενιές από τα ονόματα και από τα έργα των αρχαίων Ελληνίδων επιστημόνων, που αναμφισβήτητα υπήρχαν. Πρόκειται για την καταστροφή της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, το μεγάλο αυτό πλήγμα που υπέστη ο πολιτισμός μας.

Το άρθρο αυτό έχει σκοπό να δώσει το λόγο στη μεγάλη απύσχα της ιστορίας των μαθηματικών, στην αρχαία Ελληνίδα μαθηματικό.

Παραμερίζοντας τις πατριαρχικές προκαταλήψεις των ιστορικών συγγραφέων της ελληνικής αρχαιότητας και μαζεύοντας σκόρπιες και αντιφατικές πληροφορίες, φέραμε στο φως, ύστερα από 4ετή έρευνα, 40 γυναίκες μαθηματικούς της αρχαίας Ελλάδος, από τη μυθική **Αΐδρα** μέχρι την Αλεξανδρινή **Υπα-**

ΓΥΝΑΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ



Ανάγλυφο με τον
Θησέα και τη
μητέρα του Αΐθρα,
η οποία, καίτοι
μυθικό πρόσωπο,
θεωρείται η
πρώτη γυναίκα
μαθηματικός

Λέου, Βικέντιου Βιβιάνι (1622-1703). Από τους σύγχρονους Έλληνες οι Νικόλαος Χατζιδάκης (1880-1944) και Ευάγγελος Σταμάτης (1898-1990) αναφέρουν σε διάφορα έργα τους μόνο μία γυναίκα μαθηματικό, τη **Νικαρέτη την Κορινθία**.

Οι σχολές στις οποίες φοίτησαν αρκετές από τις γυναίκες που θα αναφέρουμε είναι:

α) Η Πυθαγόρειος σχολή της Σάμου.

β) Η Πυθαγόρειος σχολή του Κρότωνος της Ιταλίας.

γ) Η Ακαδημία του Πλάτωνος.

δ) Η Ελευθέρη Σχολή των Αθηνών.

ε) Η Σχολή (Μουσείο) της Αλεξάνδρειας.

Από την ιστορική λοιπόν έρευνα προέκυψαν οι επόμενες γυναίκες μαθηματικοί από το 10ο π.Χ. έως τον 4ο μ.Χ. αιώνα:

1. **Αΐθρα** (10ος-9ος π.Χ. αιώνας)

Μέσα από την αχλύ της ιστορίας ξεπροβάλλει η μυθική μορφή της Αΐθρας, κόρης του βασιλιά της Τροιζήνας **Πιτθέα** και μάνας του **Θησέα**, με μίαν άλλη ιδιότητα, άγνωστη στους πολλούς. Την ιδιότητα της δασκάλας της πρακτικής αριθμητικής (λογιστικής). Ιέρεια λοιπόν των απαρχών της πλέον εγκεφαλικής επιστήμης, η Αΐθρα μάθαινε λογιστική στα παιδιά της Τροιζήνας, με εκείνη την πολύπλοκη μέθοδο, που προκαλεί δέος, μιας και δεν υπήρχε το μηδέν και οι αριθμοί συμβολίζονταν πολύπλοκα, αφού τα σύμβολά τους απαιτούσαν πολλές επαναλήψεις. Δίδασκε ακόμη τη χρήση του άβακα και τη γραφή των αριθμών της εποχής της.

2. **Πολυγνώτη** (7ος-6ος π.Χ. αιώνας)

Ο ιστορικός Λόβων ο Αργεΐος αναφέρει την Πολυγνώτη ως σύντροφο και μαθήτριά του **Θαλού**. Ήταν γνώστρια, κατά τον **Βοήθιο**, πολλών γεωμετρικών θεωρημάτων.

3. **Θεμιστόκλεια** (6ος π.Χ. αιώνας)

Ο **Διογένης ο Λαέρτιος** (3ος μ.Χ. αιώνας), λόγιος-συγγραφέας, την αναφέρει ως Αριστόκλεια ή Θεόκλεια. Ο Πυθαγόρας πήρε τις περισσότερες από τις ηθικές αρχές του από τη δελφική ιέρεια Θεμιστόκλεια, η οποία συγχρόνως τον μύησε στις αρχές της αριθμοσοφίας και της γεωμετρίας. Σύμφωνα με το φιλόσοφο **Αριστόξενο** (4ος π.Χ. αιώνας), η Θεμιστόκλεια δίδασκε μαθηματικά σε όσους από τους επισκέπτες των Δελφών είχαν τη σχετική έφεση. Ο μύθος αναφέρει ότι η Θεμιστόκλεια είχε διακοσμήσει το βωμό του ναού του Απόλλωνος με γεωμετρικά σχήματα. Κατά τον Αριστόξενο, ο Πυθαγόρας θαύμαζε τις γνώσεις και τη σοφία της Θεμιστόκλειας, γεγονός που τον ώθησε να δέχεται αρ- ▶

τία. Ετσι πιστεύω ότι αποδώσαμε ένα μικρό φόρο τιμής στην αιώνια γνώση της γυναικείας ψυχής.

Πηγές από τις οποίες αντλήθηκαν κατόπιν επίπονης έρευνας και διασταυρώσεων, δυστυχώς πολλές φορές με μόνο τα ονόματα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, υπήρξαν τα έργα του **Ιαμβλίκου** (3ος-4ος π.Χ. αι.), του **Λόβωνος του Αργείου**, του Βυζαντινού **Ιωάννη Τζέτζη**, των Ρωμαίων **Βιτρούβιου** (1ος π.Χ. αι.) και **Βονθίου** (5ος-6ος μ.Χ. αι.), των αναγεννησιακών **Menagius** (φιλόσοφου του 12ου μ.Χ. αιώνα), συγγραφέα του έργου «*Historia mulierum philosopharum*», του **Dasypodius Cunrado** (μαθηματικού του 15ου αιώνα), του **Francesco Raparetto**, μαθηματικού του 16ου αιώνα, συγγραφέα, και του μαθητή τού **Γαλι-**

ΤΗΣ ΑΡΧΑΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ



Η Υπατία από
χαρακτικό του
19ου αιώνα

γότερα στη Σχολή του και γυναίκες.

4. Θεανώ (6ος π.Χ. αιώνας)

Η Θεανώ από τον Κρότωνα, κόρη του γιατρού **Βροντίνου**, ήταν μαθήτρια και ένθερμη οπαδός του Πυθαγόρα. Παντρεύτηκε στη Σάμο το μεγάλο Μύστη, με τον οποίο είχε τουλάχιστον 36 χρόνια διαφορά ηλικίας. Δίδαξε στις Πυθαγόρειες Σχολές της Σάμου και του Κρότωνος.

Η Θεανώ θεωρείται η ψυχή της αριθμοσοφίας, που έπαιξε κυρίαρχικό και καίριο ρόλο στην πυθαγόρεια διδασκαλία. Στην ίδια αποδίδεται η πυθαγόρεια άποψη της «χρυσής τομής».

Μετά το θάνατο του Πυθαγόρα, η Θεανώ τον διαδέχτηκε ως επικεφαλής της διασκορπισμένης πλέον κοινότητας. Με τη βοήθεια των θυγατέρων της (**Δαμούς**, **Μυίας** ή **Μυρίας** και **Αριγνώτης**) διέδωσε το επιστημονικό και φιλοσοφικό πυθαγόρειο σύστημα σ' όλη την Ελλάδα και την Αίγυπτο.

Η Θεανώ έγραψε και βιογραφία του Πυθαγόρα, η οποία χάθηκε. Με τον Πυθαγόρα απέκτησε, εκτός από τις θυγατέρες, και δύο γιους, τον **Τηλαύγη** και τον **Μνήσαρχο**.

Ο Ιάμβλιχος τη μνημονεύει ως «μαθηματικόν αξίαν μνήμης κατά παιδείαν».

Από τις 40 γυναίκες μαθηματικούς της
αρχαιότητας οι έξι είχαν συγγενική σχέση με
τον Πυθαγόρα (σύζυγος, κόρες, εγγονή, πεθερά)

5. Δαμώ (6ος π.Χ. αιώνας)

Θυγατέρα του Πυθαγόρα και της Θεανούς. Δίδαξε τα πυθαγόρεια δόγματα στη Σχολή του Κρότωνος. Μετά τη διάλυση της Σχολής, η Δαμώ, στην οποία ο Πυθαγόρας είχε εμπιστευθεί τα γραπτά του έργα, με τη ρητή εντολή να μην τα ανακοινώσει σε αμύητους, κατέφυγε στην Αθήνα. Για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα τήρησε την παραγγελία του πατέρα της. Αργότερα, όμως, δημοσίευσε μόνο τη γεωμετρική διδασκαλία του Πυθαγόρα, με τη βοήθεια του Φιλολάου και του Θυμαρίδα. Η έκδοση αυτή, που (σύμφωνα με τον Ιάμβλιχο) είχε τον τίτλο «*Η προς Πυθαγόρου Ιστορία*», ήταν μια γεωμετρία ανωτέρου επιπέδου.

6. Αριγνώτη (6ος π.Χ. αιώνας)

Φιλόσοφος, συγγραφέας, μαθηματικός από τη Σάμο. Ο **Πορφύριος** την αναφέρει ως θυγατέρα του Πυθαγόρα. «...άλλοι δε εκ Θεανούς... υιόν Τηλαύγη Πυθαγόρου αναγράφουσι και θυγατέραν Μυίαν, οι δε και Αριγνώτην». Το λεξικό Σούδα την αναφέρει ως μαθήτρια του Πυθαγόρα. «Αριγνώτη μαθήτρια Πυθαγόρου του μεγάλου και Θεανούς, Σαμία, φιλόσοφος Πυθαγορική».

7. Μυία (6ος π.Χ. αιώνας)

Μυία ή Μυρία, κόρη του Πυθαγόρα και της Θεανούς, Πυθαγόρεια και η ίδια. Γυναίκα του **Μίλωνος του Κροτωνιάτου**. Δίδαξε στη Σχολή του Κρότωνος. Αναφέρεται ως γνώστρια της γεωμετρίας. Της αποδίδεται η επινόηση της τρίτης (ή εσθηκτικής) μεσότητας.

8. Δεινώ (6ος π.Χ. αιώνας)

Γυναίκα του Βροντίνου. Μαθήτρια και πεθερά του Πυθαγόρα, γνώστρια της αριθμοσοφίας. Μελέτησε, κατά τον Dasypodius, τους ελλειπείς αριθμούς.

9. Ελορίς η Σαμία (6ος π.Χ. αιώνας)

Μαθήτρια του Πυθαγόρα. Γνώστρια της γεωμετρίας.

10. Φιντύς (6ος π.Χ. αιώνας)

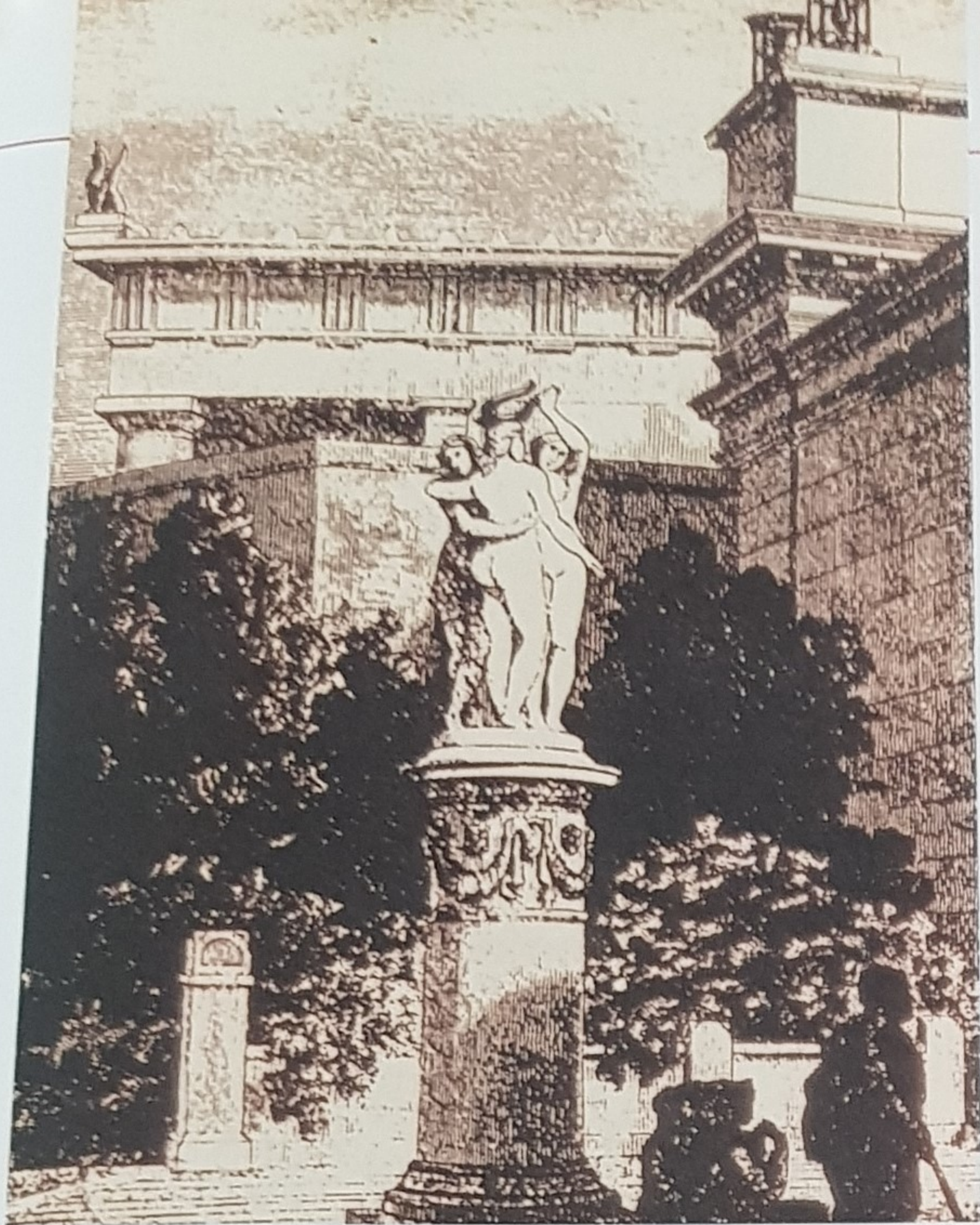
Αναφέρεται και ως Φίλτις. Μαθήτρια του Πυθαγόρα, θυγατέρα του Θεόφρη από τον Κρότωνα και αδελφή του **Βυνδάκου**. Δίδαξε στη Σχολή του Κρότωνος. Ο Ρωμαίος συγγραφέας Βοήθιος (480-524 μ.Χ.) την αναφέρει ως εμπνεύστρια μιας αριθμητικής αναλογίας (άγνωστο ποιας).

11. Μελίσσα (6ος π.Χ. αιώνας)

Μαθήτρια του Πυθαγόρα. Ασχολήθηκε με την κατασκευή κανονικών πολυγώνων. Ο Λόβων ο Αργεΐος γράφει για μια άγνωστη εργασία της: «Ο κύκλος φησίν (η Μελίσσα) των εγγεγραφομένων πολυγώνων απάντων εστί».

12. Τυμίχα (6ος π.Χ. αιώνας)

Η Τυμίχα, γυναίκα του Κροτωνιάτου **Μυλλίου** ήταν (σύμφωνα με τον Διογένη Λαέρτιο) Σπαρτιάτισσα, γεννημένη στον Κρότωνα. Από πολύ νωρίς



έγινε μέλος της πυθαγόρειας κοινότητας. Αναφέρεται από τον Ιάμβλικο ένα σύγγραμμά της σχετικά με τους «φίλους αριθμούς».

Μετά την καταστροφή της Σχολής από τους δημοκρατικούς του Κρότιωνα, η Τυμίχα κατέφυγε στις Συρακούσες. Ο τύραννος των Συρακουσών Διονύσιος απαίτησε από την Τυμίχα να του αποκαλύψει τα μυστικά της πυθαγόρειας διδασκαλίας, έναντι μεγάλης αμοιβής. Αυτή αρνήθηκε κατηγορηματικά και μάλιστα έκοψε με τα δόντια τη γλώσσα της και την έφτυσε στο πρόσωπο του Διονυσίου. Το γεγονός αυτό αναφέρουν ο **Ιππόβοτος** και ο **Νεάνδης**:

«...καταπλεγέντος δε του Διονυσίου και μεταστήσαι κελεύσαντος αυτόν συν βία, βασάνους δε επιφέρειν τη Τυμίχα προστάτιοντος· ...η γενναία συμβρύξασα επί της γλώσσης τους οδόντας και αποκόψασα αυτήν προσέπτυσσε τω τυράννω...».

13. Πτολεμαῖς (6ος π.Χ. αιώνας)

Πτολεμαῖς η Κυρηναία. Νεοπυθαγόρεια φιλόσοφος, μουσικός και μαθηματικός. Την αναφέρει ο **Πορφύριος** στο έργο του «Εἰς τὰ Ἀρμονικά Πτολεμαίου υπόμνημα».

14. Πυθαγόρειες γυναίκες (γύρω στους 60-50 π.Χ. αιώνες)

Ο Ιάμβλικος στο έργο του «Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου» διέσωσε τα ονόματα δεκαεφτά πυθαγορείων γυναικῶν («Πυθαγορίδες γυναίκες»), που ήταν γνώστριες της πυθαγόρειας φιλοσοφίας και των πυθαγορείων μαθηματικών. Ἦδη έχουμε αναφέρει μερικές απ' αυτές. Οι υπόλοιπες είναι:

α) **Ρυνδακώ**, ἀδελφή Βυνδάκου.

β) **Οκκελώ** και **Εκκελώ** (ἀδελφές) ἀπὸ τις Λευκανές.

γ) **Χειλωνίς**, κόρη **Χειλῶνος** τοῦ Λακεδαιμονίου.

δ) **Κρατσίκλεια**, σύζυγος **Κλεάνορος** τοῦ Λακεδαιμονίου.

ε) **Λασθένεια** ἢ **Αρκάδισσα**.

στ) **Αβροτέλεια**, κόρη **Αβροτέλους** τοῦ Ταραντίνου.

ζ) **Εχεκράτεια** ἢ **Φλιασία**.

η) **Θεανώ**, γυναίκα τοῦ Μεταποντίνου Βροντίνου.

θ) **Τυρσηνίς** ἢ **Συβαρίτις**.

ι) **Πεισιρρόδη** ἢ **Ταραντινίς**.

ια) **Θεάδουσα** ἢ **Λάκαινα**.

ιβ) **Βοιώ** ἢ **Αργεία**.

ιγ) **Βαβέλυκα** ἢ **Αργεία**.

ιδ) **Κλεαίχημα**, ἀδελφή **Αυτοχαρίδα** τοῦ Λάκωνος.

ιε) **Νισθαιάδουσα**.

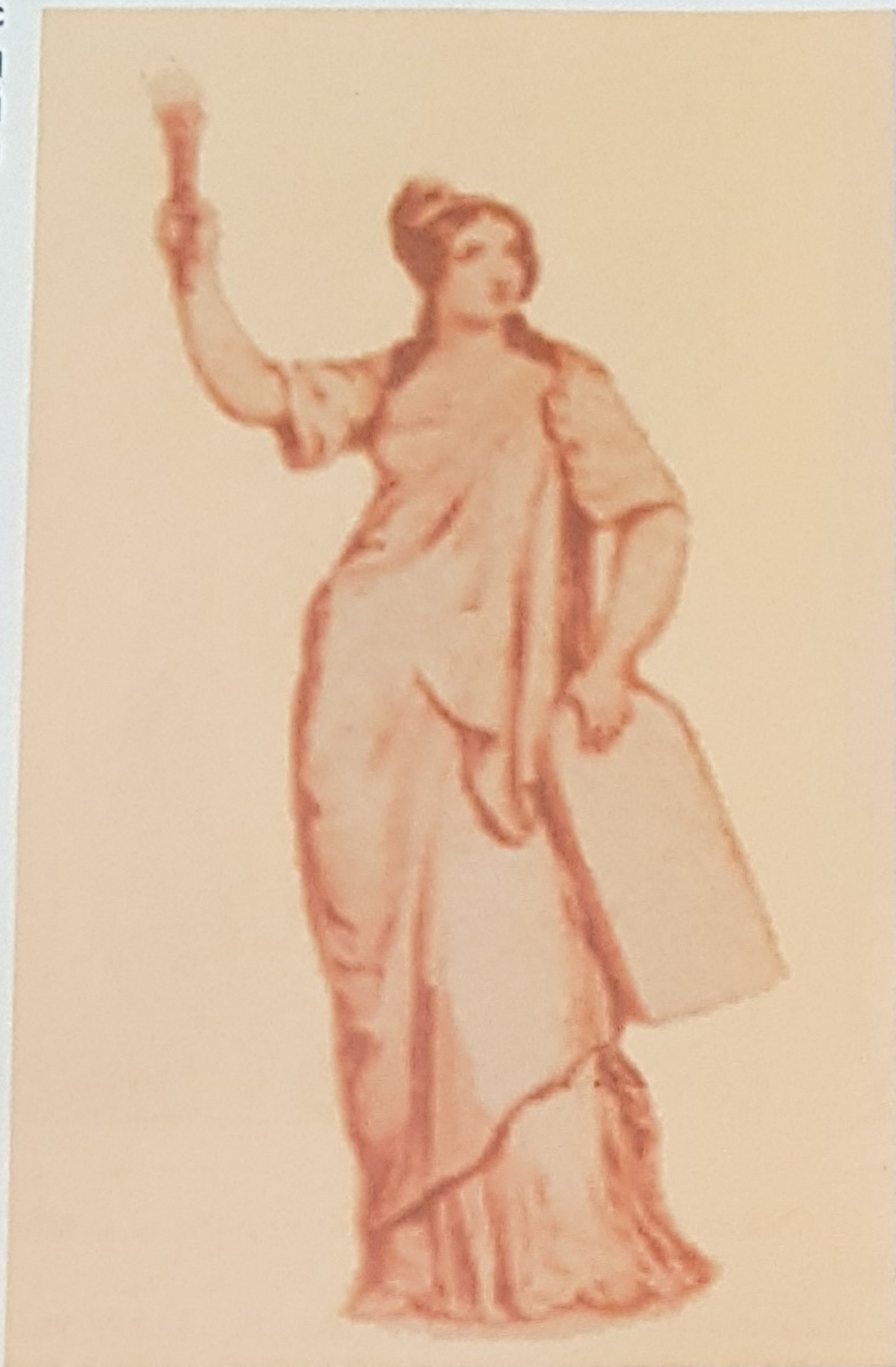
15. Διοτίμα ἀπὸ τὴ Μαντίνεια (6ος-5ος π.Χ. αἰώνας)

Στο «Συμπόσιο» τοῦ Πλάτωνος, ὁ Σωκράτης ἀναφέρεται στὴ δασκάλα τοῦ Διοτίμα, ἱέρεια στὴ Μαντίνεια, ποὺ υπῆρξε πυθαγόρεια καὶ γνώστρια τῆς πυθαγόρειας ἀριθμοσοφίας. Κατὰ μαρτυρία τοῦ Ξενοφώντος, ἡ Διοτίμα δὲν ἦταν ἀπειρὴ τῶν πλέον δι-

Αριστερά: παρ' ὅτι ἡ ἱστορία τοῦ ἀρχαίου κόσμου δὲν εἶναι «ἱστορία γυναικῶν», ἡ ἐρευνα καταγράφει 40 γυναῖκες μαθηματικούς στὴν ἀρχαία Ἑλλάδα (φανταστικὴ γκραβούρα). Πάνω, ὁ Ιάμβλικος (φανταστικὴ γκραβούρα) διέσωσε τὰ ονόματα τῶν ἀρχαίων Ἑλληνίδων μαθηματικῶν

Ἡ Θεανώ θεωρεῖται ἡ ψυχὴ τῆς ἀριθμοσοφίας, ποὺ ἐπαίξε κυριαρχικὸ καὶ καίριο ρόλο στὴν πυθαγόρεια διδασκαλία

Η Διοτίμα σε
σύγχρονη
ανιστορική
παράσταση



Η δελφική ιέρεια Θεμιστόκλεια ήταν αυτή που μύησε τον Πυθαγόρα στις αρχές της αριθμοσοφίας και της γεωμετρίας

σκολονόπων γεωμετρικών θεωρημάτων «Ουκ άπειρός γε αυτών (των δυσσυνέτων διαγραμμάτων) ην».

16. **Βιτάλη** (6ος-5ος π.Χ. αιώνας)

Βιτάλη ή και Βιστάλα, κόρη της Δαμούς και εγγονή του Πυθαγόρα. Γνώστρια των πυθαγορείων μαθηματικών. Η Δαμώ προτού πεθάνει της εμπιστεύθηκε τα «υπομνήματα», δηλαδή τα φιλοσοφικά κείμενα του πατέρα της.

17. **Περικτιόνη** (5ος π.Χ. αιώνας)

Πυθαγόρεια φιλόσοφος, συγγραφέας και μαθηματικός. Ανώνυμες πηγές την ταυτίζουν με την Περικτιόνη, τη μητέρα του Πλάτωνος και κόρη του **Κριτία**. Ο μαθηματικός Πλάτων, όπως και ο φιλόσοφος Πλάτων, οφείλει μάλλον την πρώτη γνωριμία του με τα μαθηματικά και τη φιλοσοφία στην Περικτιόνη.

18. **Λασθένια** (4ος π.Χ. αιώνας)

Η Λασθένια από την Αρκαδία είχε μελετήσει τα



έργα του Πλάτωνος και ήρθε στην Ακαδημία (μεταμφιεσμένη σε άνδρα) για να σπουδάσει μαθηματικά και φιλοσοφία. Μετά το θάνατο του Πλάτωνος συνέχισε τις σπουδές της κοντά στον ανιψιό του **Σπεύσιππο**. Αργότερα έγινε κι αυτή φιλόσοφος και σύντροφος του Σπευσίππου.

19. **Αξιοθέα** (4ος π.Χ. αιώνας)

Μαθήτρια κι αυτή, όπως και η Λασθένια, της Ακαδημίας. Ηρθε στην Αθήνα από την πελοποννησιακή πόλη Φλιούντα. Εδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τη φυσική φιλοσοφία. Αργότερα δίδαξε τις επιστήμες αυτές στην Κόρινθο και την Αθήνα.

20. **Νικαρέτη η Κορινθία** (4ος π.Χ. αιώνας)

Αναφέρεται από τον Ν. Χατζιδάκη ως «της γεωμετρίας θεραπαινίς». Την αναφέρει ακόμη και ο Ε. Σταμάτης. Από τους αρχαίους συγγραφείς τη μνημονεύει ο **Στοβαίος**.



21. Αρετή η Κυρηνεία (4ος-3ος π.Χ. αιώνας)

Κόρη του Αριστίππου, ιδρυτή της κυρηναικής φιλοσοφικής Σχολής, η Αρετή (συναντάται και ως Αρήτη) σπούδασε στην Ακαδημία του Πλάτωνος. Λέγεται ότι δίδαξε μαθηματικά, φυσική και ηθική φιλοσοφία στην Αττική για αρκετά χρόνια και ότι έγραψε τουλάχιστον σαράντα βιβλία ποικίλου περιεχομένου, από τα οποία τα δύο περιελάμβαναν και πραγματείες για τα μαθηματικά. Μετά το θάνατο του πατέρα της τον διαδέχθηκε, κατόπιν εκλογής, στη διεύθυνση της Σχολής.

22. Πυθαῖς (2ος π.Χ. αιώνας)

Γεωμέτρης, κόρη του μαθηματικού Ζηνοδώρου. Ασχολήθηκε με εμβαδά επιπέδων χωρίων. Την αναφέρει ο Ευτόκιος.

Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς (4ος μ.Χ. αιώνας) στα σχόλιά του στη «Μαθηματική Σύνταξη» του Πτολεμαίου γράφει: «...Ποισόμεθα δη την τούτων από-

δειξιν εν εποιομή εκ των Ζηνοδώρου και Πυθαῖδος δεδειγμένων εν τῷ Περί ισοπεριμέτρων σχημάτων».

23. Πανδροσίων (4ος μ.Χ. αιώνας)

Συναντάται και ως Πανδρόσιος. Αλεξανδρινή γεωμέτρης, μάλλον μαθήτρια του Πάππου, ο οποίος της αφιερώνει και το γ' βιβλίο της «Συναγωγής». Η Πανδροσίων, κατά τον Πάππο, είχε μέτρια μαθηματική παιδεία. Κατά μια εκδοχή ήταν άνδρας.

Η Πανδροσίων χωρίζει τα γεωμετρικά προβλήματα σε τρεις κατηγορίες: «τρία γένη είναι των εν γεωμετρία προβλημάτων, και τα μεν αυτών επίπεδα καλείσθαι, τα δε γραμμικά».

24. Υπατία (370-415 μ.Χ.)

Η θυγατέρα του φιλοσόφου και μαθηματικού Θέωνος του Αλεξανδρέως είναι η μόνη γνωστή μαθηματικός της αρχαίας Ελλάδας. Για τη ζωή, το έργο της και το μαρτυρικό θάνατό της έχουν γραφτεί κατά καιρούς πολλά. Σημειώνουμε ότι ο θάνατος της Υπατίας σηματοδοτεί και το τέλος της αρχαίας ελληνικής επιστήμης.

Με την Υπατία τελειώνει και ο μικρός αριθμός των αρχαίων Ελληνίδων μαθηματικών που ανασύραμε από την αφάνεια. Πιστεύουμε, όμως, ακράδαντα πως θα υπήρξαν πολύ περισσότερες με θετική συμβολή στη θεμελίωση και ανάπτυξη του μαθηματικού οικοδομήματος. Ας ελπίσουμε ότι η επίμονη ιστορική έρευνα θα τις φέρει πάλι στο φως της επιστημονικής αποκατάστασης.

Η Υπατία, κόρη του φιλοσόφου και μαθηματικού Θέωνος του Αλεξανδρέως, είναι η μόνη ευρέως γνωστή μαθηματικός της αρχαίας Ελλάδας

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Boyer J., «*Histoire des Mathematiques*» (Gathier - Villars), Paris 1900.

Dasypodio Cunrado, «*Elementorum Geometriae*», Argentorati 1563.

Menagius, «*Historia mulierum philosopharum*», Λιψία 1896.

Morans John, «*Women in Science*», Cambridge 1913.

«*Veterum Mathematicorum Opera*» (Thevenot), Paris 1693.

Μπαϊρακτάρη Α., «*Αλεξανδρινοί μαθηματικοί*» (αυτοέκδοση), Αθήνα 1962.

Σπανδάγου Ευαγ.-Σπανδάγου Ρ.-Τραυλού Δ. «*Οι Μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδος*» (Αΐδρα), Αθήνα 2000.

Τσούκας Χ., «*Αρχαίες Γυναίκες*» (Χατζηνικολή), Αθήνα 1992.

Χατζιδάκη Ν., «*Μεγάλοι γεωμέτραι της ελληνικής αρχαιότητας*» (αυτοέκδοση), Αθήνα 1917.

Θησέας και Αΐδρα.
Ελαιογραφία
(1635-1640) του
Laurent de la Hire
(Μουσείο Καλών
Τεχνών,
Βουδαπέστη)

Σ

ΤΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗ ΤΣΙΜΠΟΥΡΑΚΗ
μαθηματικού-αρχιτέκτονα

την Αρχαία Ελλάδα η μαθηματική επιστήμη χωριζόταν σε δύο μεγάλους κλάδους, το **θεωρητικό** και τον **εφαρμοσμένο**. Ο πρώτος από αυτούς, που χαρακτηριζόταν ως καθαρός και καθολικός, περιλάμβανε την **αριθμητική** και τη **γεωμετρία**, ενώ ο δεύτερος, ο ασχολούμενος με τα «αισθητά», περιλάμβανε τις τέχνες: **λογιστική**, **γεωδαισία**, **οπτική**, **κοινωνική**, **μηχανική** και **αστρονομία**.¹

Ως μαθηματικές τέχνες λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι χαρακτηρίζονταν οι τέχνες εφαρμογής των θεωρητικών μαθηματικών στην επίλυση των καθημερινών προβλημάτων της ζωής (υπολογισμών, διανομών, κατασκευών κ.λπ.). Τις τέχνες αυτές τις υπηρετούσαν οι ίδιοι οι μαθηματικοί, ή μαθητές τους κάτω από την εποπτεία τους.

Ευνόητο είναι ότι η διάκριση των μαθηματικών έγινε σταδιακά από τον 6ο αι. π.Χ. μέχρι και τον 1ο αι. π.Χ. και ότι αυτή ήταν προϊόν της ιδιαίτερης ιδεολογίας του κάθε μελετητή. Αυτό το λέμε γιατί υπήρχαν φιλόσοφοι-μαθηματικοί οι οποίοι επεδίωκαν, μέσω των μαθηματικών, την προσέγγιση του «θείου»² (Πυθαγόρειοι και ακολουθούντες) και άλλοι οι οποίοι έδεταν τις γνώσεις τους στην υπηρεσία της ζωής και στην ερμηνεία των φαινομένων της φύσης.

Δεν είναι περίεργο όμως ότι αρκετοί από την πρώτη κατηγορία ασχολήθηκαν με ιδιαίτερη αφοσίωση με τα προβλήματα της δεύτερης, και αυτό γιατί, όπως λέει και ο **Πλούταρχος**:

«...Οι ηδονές από τη γεωμετρία και την αστρονομία και τη μουσική... έλκουν τους μελετητές, όπως τα πουλιά σουσουράδες τους ερωμένους...».

Οι πιο πάνω μαθηματικές τέχνες λέει ο **Ηρων** ότι συγγενεύουν περισσότερο:

— Η **λογιστική** και η **κανονική** με την **αριθμητική**.

— Η **οπτική** και η **γεωδαισία** με τη **γεωμετρία**, και

— Η **μηχανική** και η **αστρονομία** και με τις δύο.

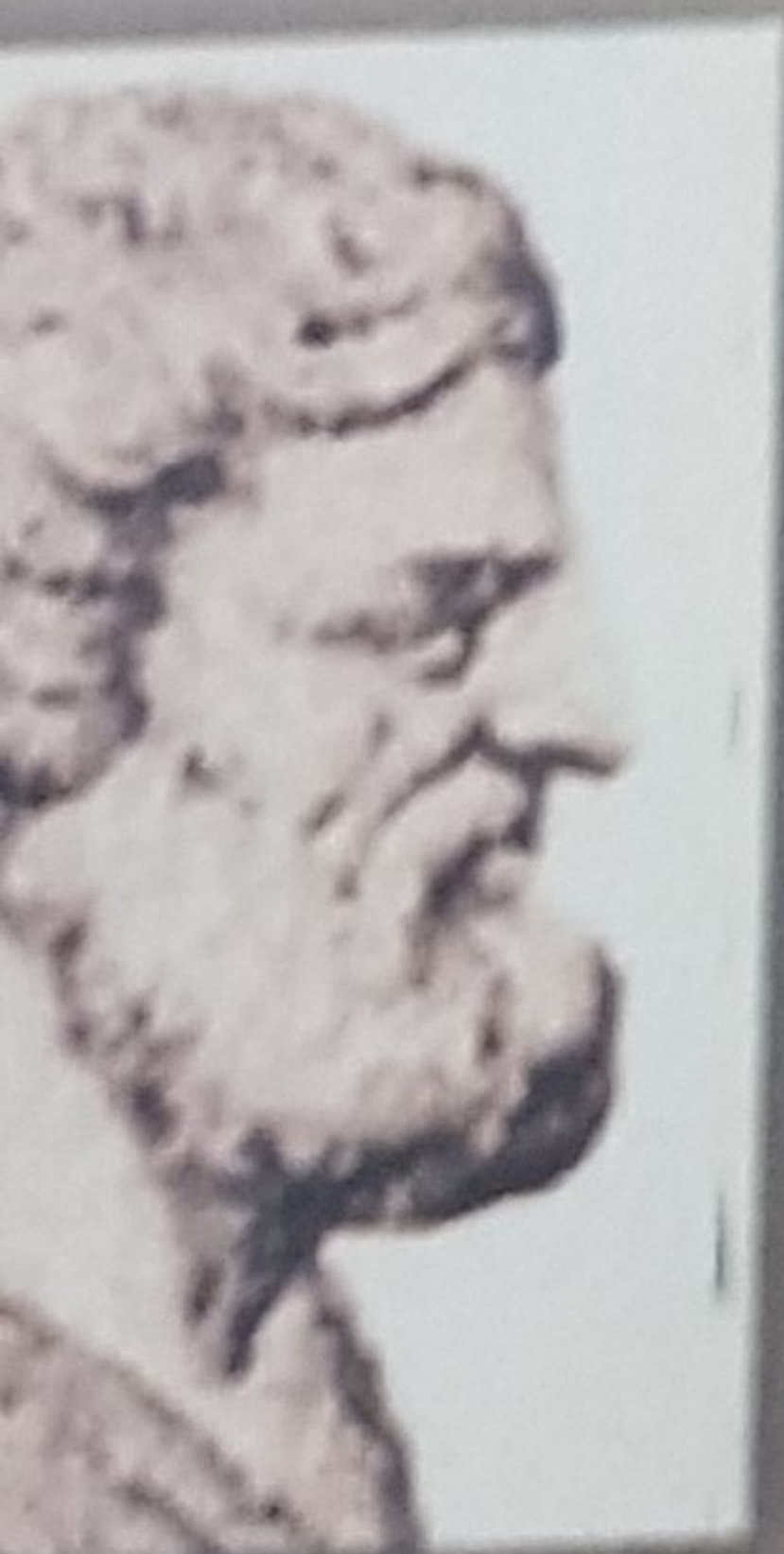
Ας δούμε όμως αναλυτικότερα το περιεχόμενο της κάθε μίας από τις τέχνες αυτές και τους κυριότερους από τους υπηρέτες τους.

1. Η ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ

Ήταν η τέχνη των υπολογισμών με τη βοήθεια των οποίων προσδιόριζαν την αριθμητική τιμή διαφόρων μεγεθών, όπως: τόκων, φόρων, ποσοστών, μηκών, εμβαδών και άλλων. Οι λογιστές, εκτός α-

Στη μέση, τα μαθηματικά στην αρχαία Ελλάδα εκτός από θεωρητική αναζήτηση εύρισκαν και πεδίο εφαρμογής στις αρχιτεκτονικές κατασκευές (φανταστική γκραβούρα).

Κάτω, Απολλώνιος ο Περγαίος (ανιστορική απεικόνιση)



πό τις τέσσερις γνωστές μας αριθμητικές πράξεις, εφαρμόζαν με άνεση διάφορες μεθόδους υπολογισμού, μεταξύ των οποίων και υπολογισμού τετραγωνικών και κυβικών ριζών.³

$$3.765.629 =$$

$$= 376 \text{ μυριάδες}$$

$$+ 5 \text{ χιλιάδες}$$

$$+ 6 \text{ εκατοντάδες}$$

$$+ 2 \text{ δεκάδες}$$

$$+ 9 \text{ μονάδες} =$$

$$= \overset{\text{ισ}}{\text{M}}, \text{ εκκθ}$$

Από τους λογιστές της ελληνικής αρχαιότητας, και ιδιαίτερα τους μεγάλους, γνωρίζουμε λίγους.

ΟΙ ΜΑΘΗ



Πάνω, το όρυγμα του Ευπαλίνου στη Σάμο (530 π.Χ.). Πρόκειται για ευθύγραμμη και οριζόντια σήραγγα, μήκους 1.036 μέτρων, της οποίας η εκσκαφή άρχισε από τα δύο μέρη του βουνού. Αριστερά, η Ακρόπολη των Αθηνών. Κάτω, ο Ξενοκράτης Αγαθάνορος Χαλκηδόνιος. Προτομή που συχνά αποδίδεται και στον Χρύσιππο (Γλυπτοθήκη Μονάχου)

Αυτοί ήταν κυρίως φιλόσοφοι και η ενασχόλησή τους με τη λογιστική έγινε γνωστή από αναφορές άλλων.

Οι κυριότεροι από αυτούς και τα αντίστοιχα έργα τους ήταν:

- Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος (428-365 π.Χ.), «Διατριβαί»

- Ο Ξενοκράτης ο Χαλκηδόνιος (περί το 340 π.Χ.), «Περί Λογιστικών» σε 9 βιβλία. Μαθητής του Πλάτωνα και τρίτος διευθυντής της Ακαδημίας.

- Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (262-180 π.Χ.)

— «Οκυτόκιον» (ταχύς τοκετός) για γρήγορη εκτέλεση αριθμητικών πράξεων.

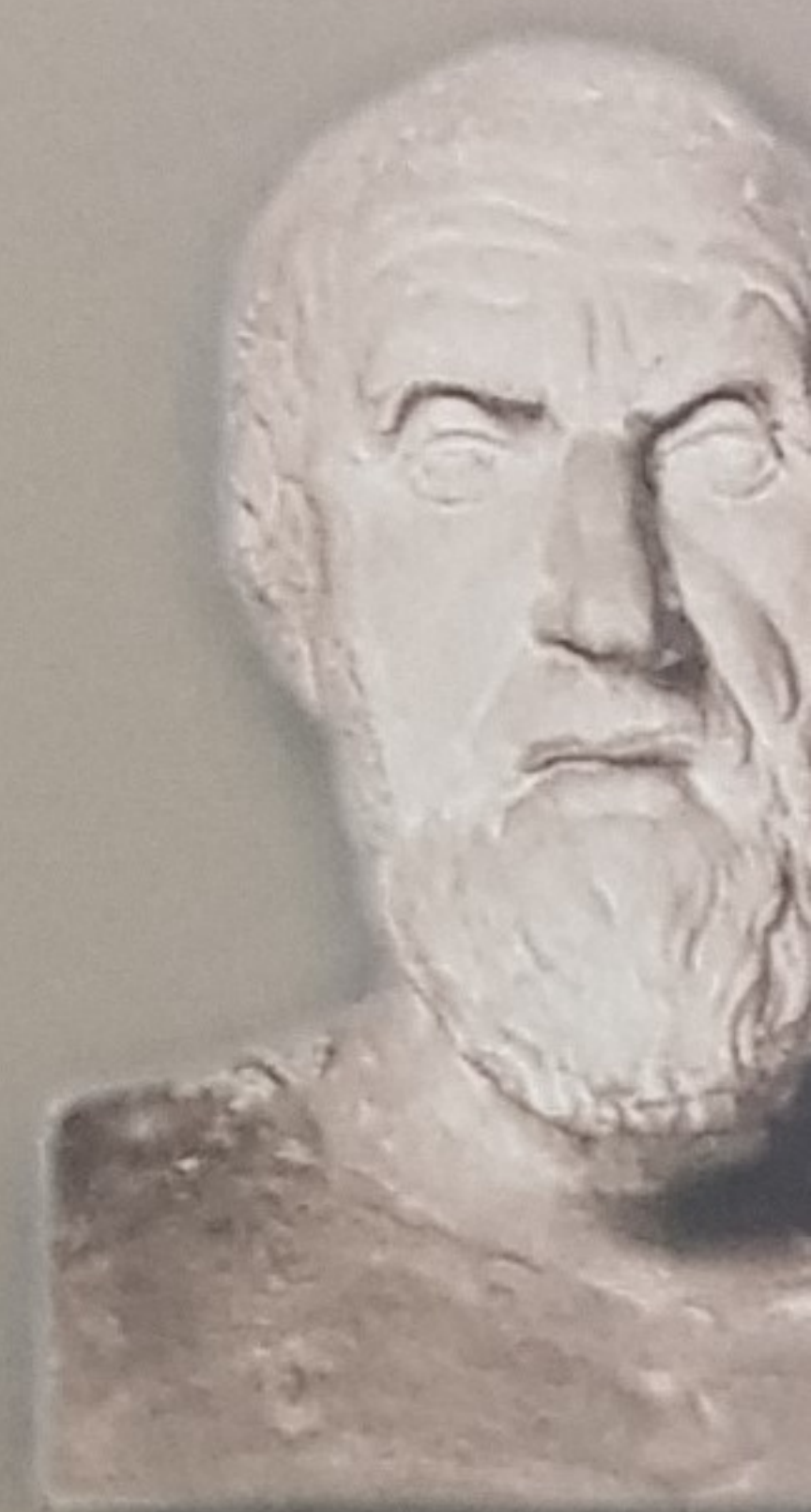
— «Περί Λογιστικών».

Τα πιο πάνω έργα χάθηκαν όλα. Η απώλεια αυτή ήταν μεγάλο ατύχημα και ιδιαίτερα εκείνη των έργων «Περί Λογιστικών», γιατί αυτά αναφέρονταν στην ιστορία της λογιστικής και στους πρωτεργάτες των κατακτήσεών της. Πάντως η λογιστική ήταν κατάκτηση αρχαιότερη του 5ου αι. π.Χ., αφού ήδη, περί το 500 π.Χ., οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει μια εξαιρετική μέθοδο υπολογισμού του $\sqrt{2}$.

Η εξαιρετική σημασία της λογιστικής τονίζεται από τον Πλάτωνα, ο οποίος με θαυμασμό λέει:

«...και στην οικονομία και στην πολιτεία και σε όλες τις τέχνες, κανένα μάθημα δεν έχει τόσο με- ▶

ΜΑΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ





Νόμισμα που πιθανολογείται ότι φέρει παράσταση του Αναξαγόρα

γάλη εκπαιδευτική δύναμη όσο η διατριβή περί τους αριθμούς...».⁴

2. Η ΓΕΩΔΑΙΣΙΑ

Ήταν η τέχνη της μέτρησης και διαίρεσης τμημάτων γης (γεωδαισία = γη + δαίω, μοιράζω, διαιρώ). Αποτελούσε ουσιαστικά τη μαθηματική τέχνη του τοπογράφου, με τις μετρήσεις του οποίου εξυπηρετούνταν οι αποτυπώσεις και διανομές της γης, οι αγοραπωλησίες, οι φορολογήσεις και άλλες λειτουργίες αναγκαίες στην πόλη.

Ο γεωδαίτης όμως εκτελούσε και εργασίες μεγαλύτερης κλίμακας, όπως σχεδίαση τοπικών χαρτών και μετρήσεις ευρύτερων περιοχών ή και της οικουμένης ολόκληρης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μέτρηση της περιμέτρου της Γης-σφαίρας από τουλάχιστον έξι κορυφαίους γεωμέτρους.

Ο όρος «γεωδαισία» εμφανίζεται για πρώτη φορά στο έργο του **Αριστοτέλη**, ο οποίος τη χαρακτηρίζει σαν τη γεωμετρία των αισθητών.⁵ Ο Πλάτων τη γεωμετρία αυτή την ονόμαζε «μετρική».⁶

Ο **Ηρων ο Αλεξανδρεύς** (1ος αι. π.Χ.-1ος αι. μ.Χ.) δίνει τον ορισμό της γεωδαισίας.

«Η γεωδαισία είναι μια διαιρετική και συνθετι-

Με τη μαθηματική γεωγραφία μετρήθηκε η περίμετρος της Γης και εκτιμήθηκαν οι διαστάσεις της τότε γνωστής οικουμένης

Διόπτρα του Ηρώνα (1ος αιώνας π.Χ.). Η αναπαράστασή της (1903) έγινε με βάση την ακριβέστατη περιγραφή της στο έργο «Περί Διόπτρας» του Ηρώνα

κή επιστήμη των μεγεθών και των σχημάτων που αντιλαμβανόμαστε... Χρησιμοποιεί όργανα για τις σκοπεύσεις χωρίων, τις διόπτρες, τους κανόνες, τις στάθμες, τους γνώμονες και τα παρόμοια για τις μετρήσεις αποστάσεων και υψών...».⁷

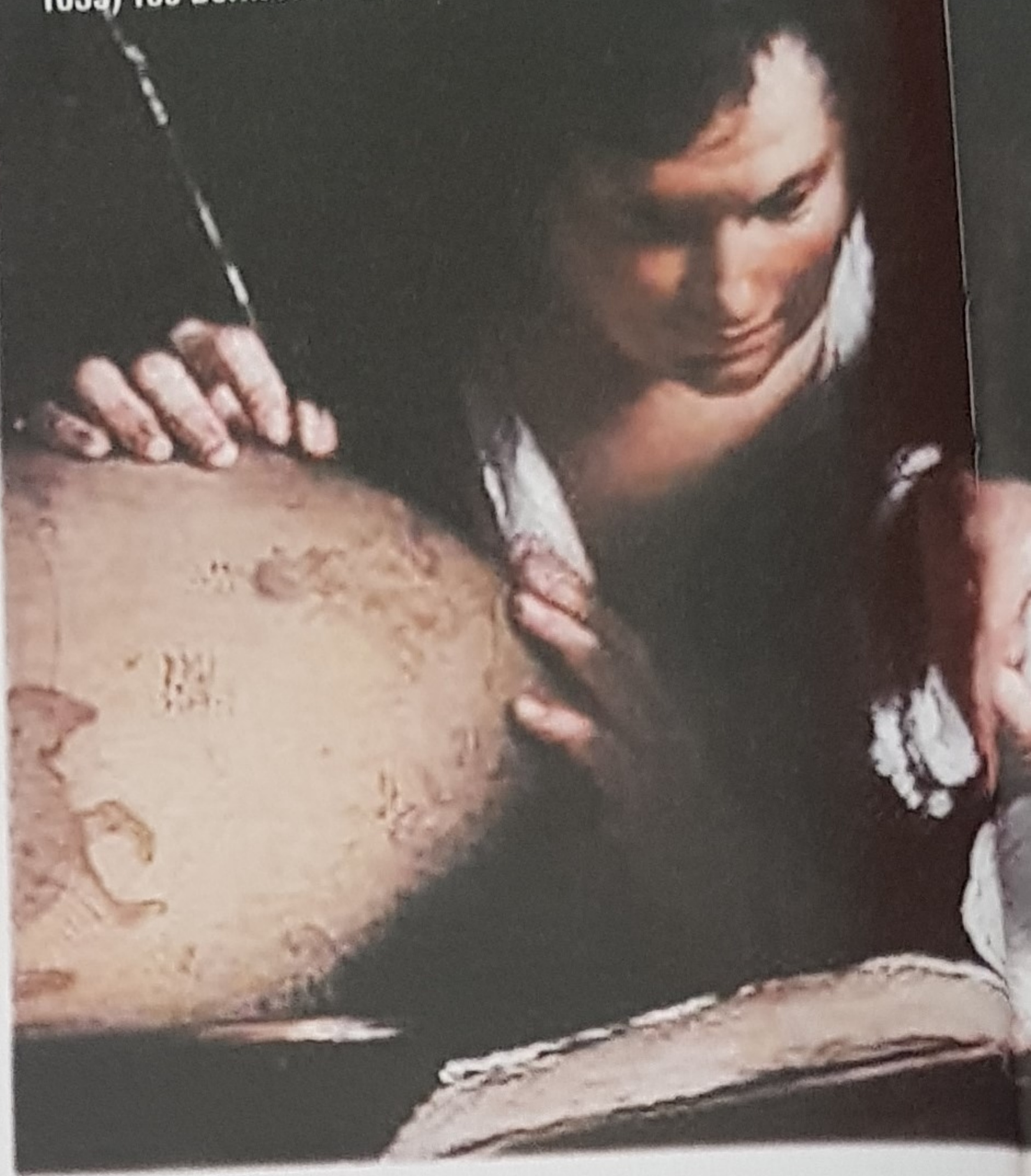
Από τα έργα για τη γεωδαισία σώθηκαν μερικά. Συγγραφείς τους ήταν και θεωρητικοί γεωμέτρους και γεωμέτρους-μηχανικοί.

Οι κυριότεροι από αυτούς και τα αντίστοιχα έργα τους ήταν:

- **Δημόκριτος ο Αβδηρίτης** (460-370 π.Χ.), «Περί Γεωργίας ή Γεωμετρικών»
- **Δικαίαρχος ο Μεσσήνιος** (350-290 π.Χ.), «Καταμετρήσεις των εν Ελλάδι ορών»
- **Ευκλείδης** (περί το 300 π.Χ.), «Περί Διαίρεσεων» (σώθηκε)
- **Ερατοσθένης ο Κυρηναίος** (276-194 π.Χ.), «Περί της αναμετρήσεως της Γης»
- **Ηρων ο Αλεξανδρεύς** (1ος αι. π.Χ.-1ος αι. μ.Χ.), «Μετρικά» (σώθηκε), «Περί Διόπτρας» (σώθηκε)

Επιστημονικό προϊόν της γεωδαισίας είναι η ελληνική **μαθηματική γεωγραφία**, η οποία κατά

Ο Ερατοσθένης ο Κυρηναίος υπολογίζει την περίμετρο της Γης. Πίνακας (περίπου 1635) του Bernardo Strozzi



τη διάρκεια του 3ου αι. π.Χ. κατόρθωσε να μετρήσει την περίμετρο της Γης-σφαίρας και να εκτιμήσει τις διαστάσεις της τότε γνωστής οικουμένης. Αποτέλεσμα αυτών των μετρήσεων ήταν ο περίφημος παγκόσμιος χάρτης της τότε γνωστής οικουμένης, από το διευθυντή της βιβλιοθήκης της Αλεξανδρείας, τον **Ερατοσθένη** τον Κυρηναίο.

Γενικά ο ρόλος της αρχαίας ελληνικής γεωδαισίας μπορεί να χαρακτηριστεί εξαιρετικός κατά τη διάρκεια όλης της ελληνικής αρχαιότητας. Αυτή υπηρέτησε τη ζωή κατά τρόπο μοναδικό και δίκαια ο **Πρόκλος**, ένας από τους τελευταίους διευθυντές της Ακαδημίας του Πλάτωνα, τόνιζε:

«...μερικοί θεωρούν ότι οι τέχνες των αισθητών είναι χρησιμότερες από τις θεωρητικές γνώσεις // όπως η γεωδαισία σε σχέση με τη γεωμετρία...».⁸

3. Η ΟΠΤΙΚΗ

Ήταν η γεωμετρική τέχνη των μετρήσεων με σκοπευτικά όργανα, και της προοπτικής σχεδίασης τοιχογραφιών και θεατρικών σκηνικών.

Τα μέρη της ήταν το **οπικό**, το **κατοπτρικό** και το **σκηνογραφικό**. Οι θεωρητικοί της γεωμετρικής οπτικής στην αρχαιότητα θεώρησαν τις φωτεινές και τις οπτικές ακτίνες ως ευθείες και μελέτησαν τον τρόπο της λειτουργίας της ανθρώπινης όρασης.

Το αποτέλεσμα ήταν να αναπτυχθεί με την πάροδο του χρόνου η μαθηματική τέχνη της οπτικής,



Ο χάρτης του Αναξίμανδρου (610-547 π.Χ.) (Αναπαράσταση κατά τον Α. Herrmann). Είναι ο πρώτος χάρτης της οικουμένης και είναι σχεδιασμένος με τη μορφή «πίνακα» (κυκλικός παγκόσμιος χάρτης) και με κέντρο τους Δελφούς

μέρες) και το ύψος των πυραμίδων στην Αίγυπτο (περί το 565 π.Χ.).

Από τότε άρχισε η μελέτη από τους γεωμέτρες της ανθρώπινης όρασης, και έτσι η οπτική σταδιακά εμπλουτίστηκε από κανόνες, μεθόδους και όρ-

η οποία, με μεθόδους και όργανα που επινόησε η ίδια, μπορούσε να μετρά αποστάσεις, μήκη και υψόμετρα απρόσιτων από το γεωμέτρη σημείων.

Το μάθημα της γεωμετρικής οπτικής ήταν από τα κύρια μαθήματα των σχολών μηχανικών της ελληνικής αρχαιότητας.

Ο πρώτος που θεώρησε τις φωτεινές ακτίνες του Ηλίου ως ευθείες, και μάλιστα παράλληλες (=η μία δίπλα στην άλλη), ήταν ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (624-546 π.Χ.). Αυτός επινόησε και εφάρμοσε τις πρώτες μεθόδους της γεωμετρικής οπτικής και έτσι κατόρθωσε να μετρήσει για πρώτη φορά με ακρίβεια τη διάρκεια του έτους (τη βρήκε ίση με 365 π-

Με τη γεωμετρική οπτική ο Θαλής ο Μιλήσιος μέτρησε για πρώτη φορά με ακρίβεια τη διάρκεια του έτους (365 μέρες)

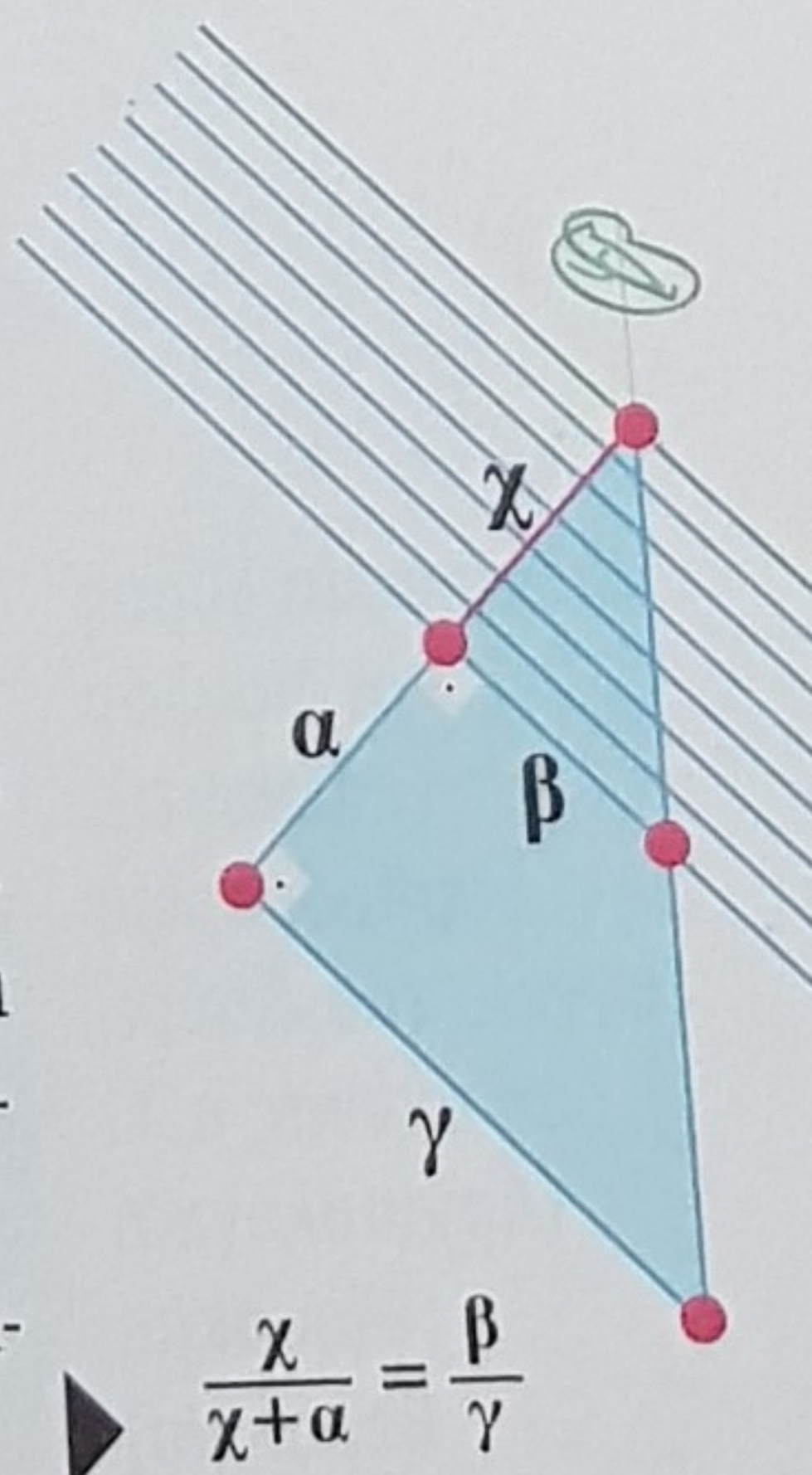
γανα, και ταυτόχρονα αναπτύχθηκαν οι πρώτοι κανόνες προοπτικής σχεδίασης, με την εφαρμογή των οποίων οι τοιχογραφίες και τα σκηνικά των θεάτρων δημιουργούσαν την ψευδαίσθηση του βάθους.

Πρώτη τέτοια προοπτική σχεδίαση θεατρικών σκηνικών αναφέρεται ότι έγινε από τον **Αγάθαρχο τον Σάμιο** (περί το 470 π.Χ.) στην Αθήνα, για τις ανάγκες κάποιας τραγωδίας του Αισχύλου.⁹ Ο Αγάθαρχος για τη σκηνογραφία του αυτή έγραψε και σχετική πραγματεία. Ανάλογη πραγματεία έγραψε αργότερα και ο δάσκαλος του Περικλή, ο **Αναξαγόρας ο Κλαζομένος** (500-428 π.Χ.). Έτσι άρχισαν και συνέχισαν να γράφονται έργα σκηνογραφίας και οπτικής.

Την κυρίως οπτική την ασκούσαν συνήθως γεωμέτρες-μηχανικοί, οι οποίοι την εφάρμοζαν, με τη βοήθεια σκοπευτικού οργάνου, σε προβλήματα ανάλογα με αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα (υπολογισμός πλάτους x ποταμού χωρίς να τον διαβούμε).

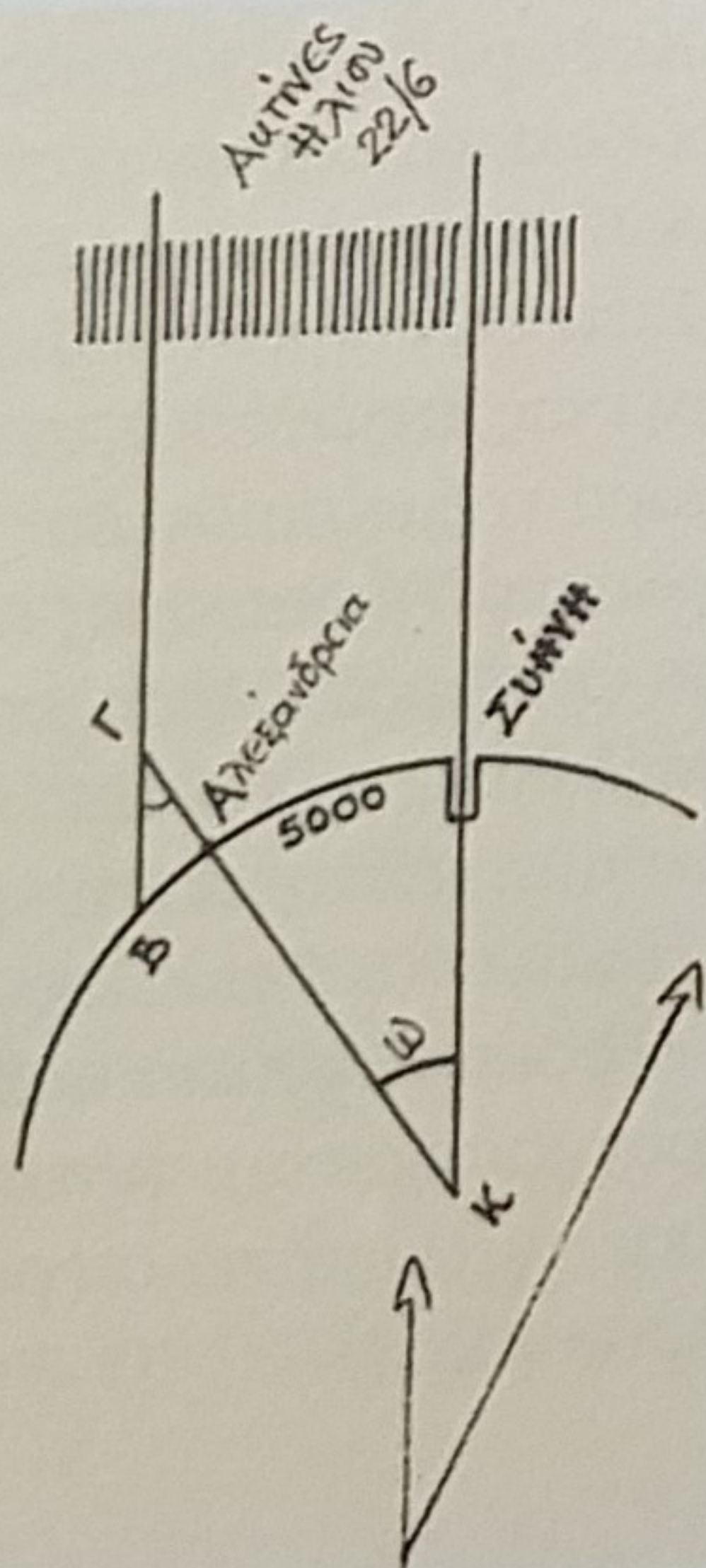
Οι γνωστότεροι υπηρέτες της οπτικής ήταν οι παρακάτω:

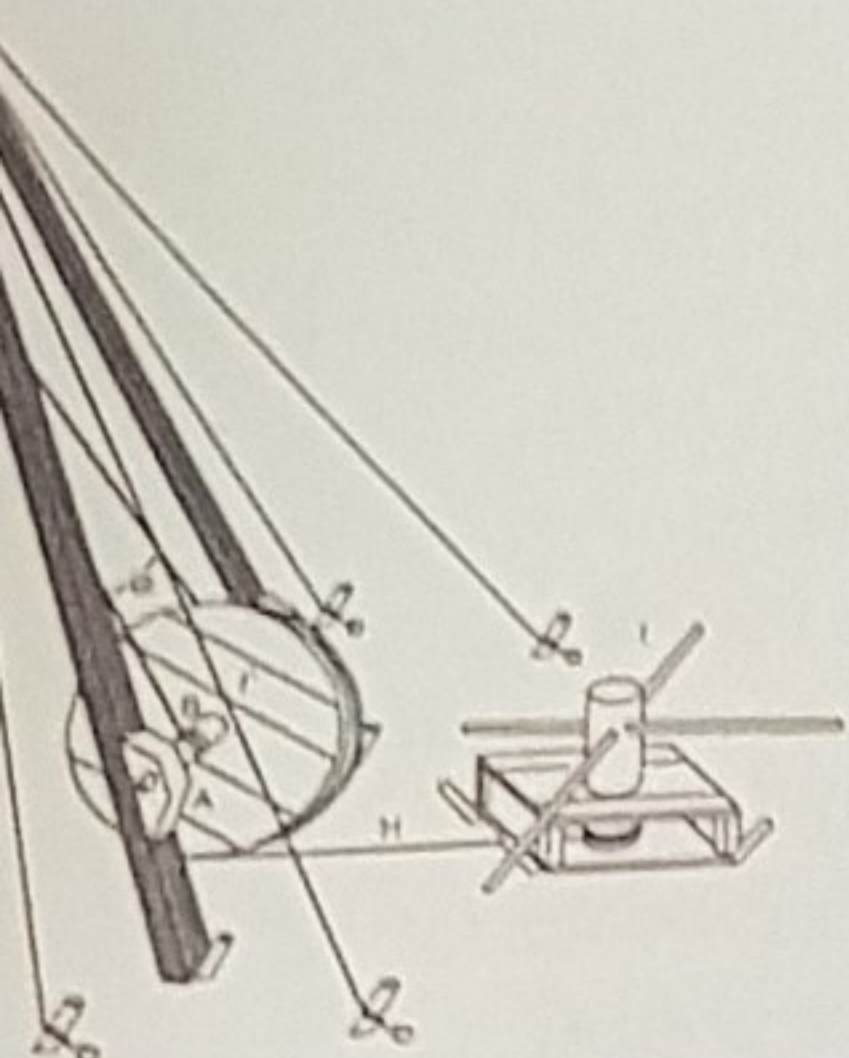
Υπολογισμός πλάτους ποταμού



$$\frac{x}{x+a} = \frac{\beta}{\gamma}$$

Η μέτρηση της Γης από τον Ερατοσθένη (~230 π.Χ.). Στις 22 Ιουνίου ακριβώς το μεσημέρι, μέτρησε στην Αλεξάνδρεια τη γωνία ΒΓΑ=ω του γνώμονα ΑΓ και της σκιάς του. Από αυτήν (ω=1/50 περιφέρειας) και το γνωστό του μήκος Αλεξάνδρεια-Συήνη (Ασουάν)= 5.000 στάδια υπολόγισε την περίμετρο της Γης Γ=250.000 στάδια





Ανυψωτική μηχανή για μεγάλα βάρη (αναπαράσταση από το «Περί Αρχιτεκτονικής» του Βιτρουβίου, βιβλίο X, εκδ. «Πλέθρον», Αθήνα 1997)

- Δημόκριτος ο Αβδηρίτης (460-370 π.Χ.).
— «Ακτινογραφία» (γεωμετρική οπτική)
— «Περί Γεωργίας ή Γεωμετρικόν» (τοπογραφική οπτική)
— «Περί Ζωγραφίας» (σκηνογραφία)
- Ευκλείδης (περί το 300 π.Χ.).
— «Οπτικά» και «Κατοπτρικά» (σώθηκαν)
- Απολλώνιος ο Περγαιός (262-180 π.Χ.), «Οπτική»
- Ηρών ο Αλεξανδρεύς (1ος αι. π.Χ.-1ος αι. μ.Χ.).
— «Περί Διόπτρας» (σώθηκε)
— «Κατοπτρικά»

Από τα βασικά στοιχεία της αρχαίας οπτικής ήταν και η κατασκευή των σκοπευτικών οργάνων, με τη βοήθεια των οποίων εφαρμόζονταν οι μέθοδοι και υπολογίζονταν τα προς μέτρηση μεγέθη.

Ως πρώτο σκοπευτικό όργανο στην ιστορία της αρχαίας οπτικής θεωρείται η διόπτρα του **Ευπαλίνου του Μεγαρέα** (περί το 530 π.Χ.), με τη βοήθεια της οποίας έγινε η χάραξη και κατασκευή του πε-

Πλάτωνα: «Κανένα μάθημα δεν έχει τόσο μεγάλη εκπαιδευτική δύναμη όσο η διατριβή περί τους αριθμούς...»

ρίφημου ορύγματος του υδραγωγείου της αρχαίας Σάμου.

Μαρτυρίες για τις αρχαίες τοπογραφικές και αστρονομικές διόπτρες διαθέτουμε αρκετές. Όμως μίας και μόνης, εκείνης του Ηρώνα, διασώθηκε η περιγραφή και αναπαραστάθηκε το 1903.¹⁰

4. Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ

Ήταν η τέχνη της κατασκευής μουσικών οργάνων, έτσι ώστε οι μουσικοί τους φθόγγοι να έχουν συχνότητες με λόγους ίσους προς εκείνους της Πυθαγόρειας μουσικής κλίμακας.

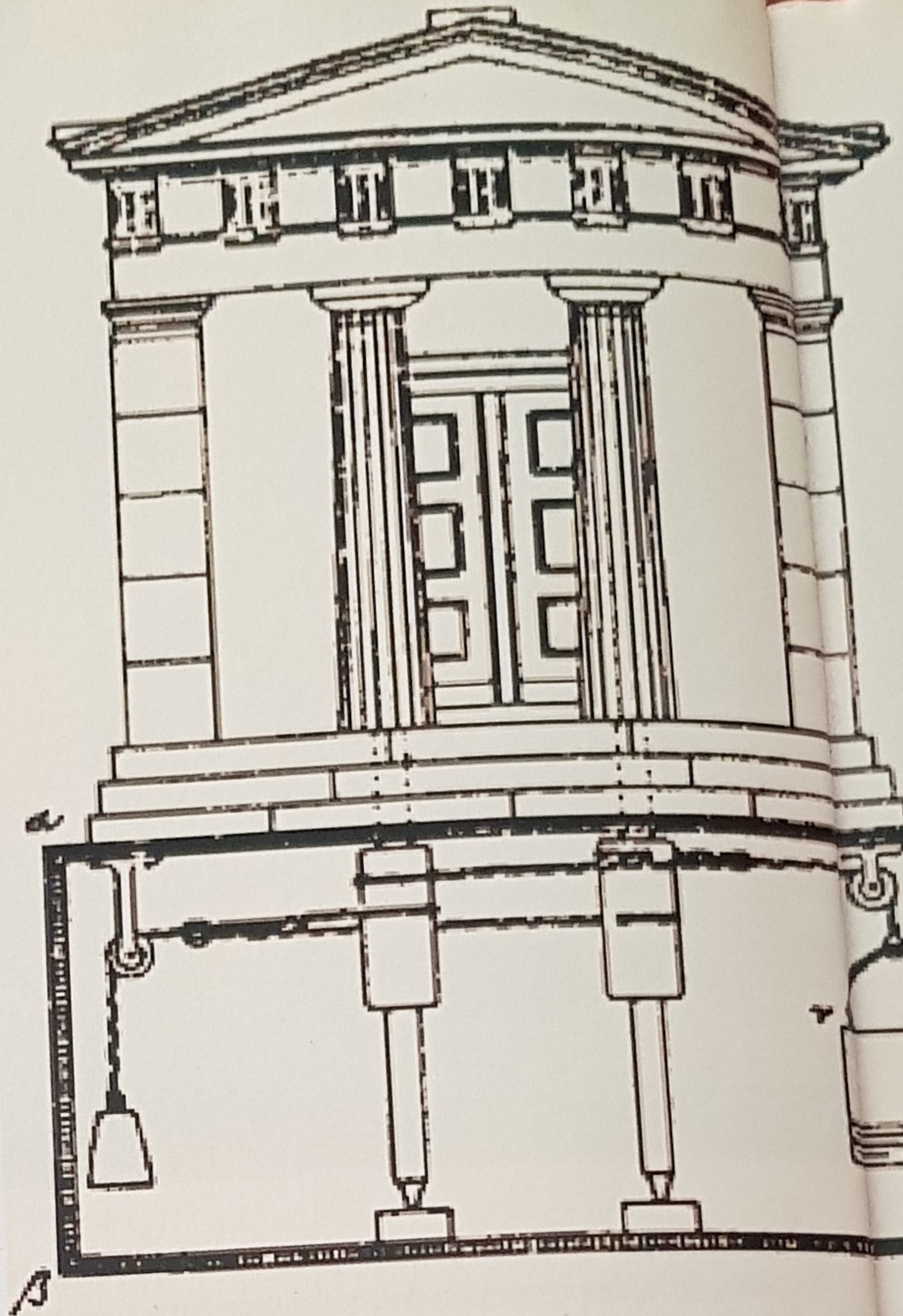
Ονομάστηκε έτσι από τον «κανόνα», το μονόχορδο ή δίχορδο πειραματικό όργανο, με το οποίο ο ίδιος ο **Πυθαγόρας ο Σάμιος** (580-500 π.Χ.) προσδιόρισε τις σχέσεις μηκών των χορδών της τετρά-

χορδης λύρας, έτσι ώστε οι συνηχήσεις τους να παράγουν έναν ευχάριστο ήχο.¹¹ Τα πρώτα συμπεράσματα ήταν ότι στις ακραίες χορδές η μία πρέπει να είναι διπλάσια της άλλης και οι ενδιάμεσες να έχουν μήκη το μέσο αριθμητικό και αρμονικό των άκρων. Αργότερα ο ίδιος πρότεινε την οχτάχορδη λύρα με την παρεμβολή άλλων τεσσάρων χορδών στις υπάρχουσες, έτσι ώστε τα μήκη τους να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.

Ανάλογες προτάσεις έκανε και για τους αυλούς. Καθιέρωθηκε, λοιπόν, ένα σύνολο κανόνων με τη βοήθεια των οποίων ήταν δυνατή η κατασκευή μουσικών οργάνων, οσουδήποτε μεγέθους.

Στην ελληνική αρχαιότητα η μουσική και τα όργανά της αποτέλεσαν, από την αρχαϊκή ήδη εποχή, τμήμα της εκπαίδευσης των νέων. Αναφέρεται ότι πρώτος ο **Τέρπανδρος** (περί το 680 π.Χ.) εισήγαγε την εφτάχορδη λύρα και καθιέρωσε το μονωδικό τραγούδι με συνοδεία λύρας. Αργότερα και ενώ η μουσική τέχνη και τα όργανά της είχαν εξελιχθεί, ο **Πλάτων** (380 π.Χ.) τόνιζε ότι:

«Η εκπαιδευτική καθαρότητα των νέων πρέπει να πραγματοποιείται με τα πέντα μαθήματα, αριθμητική, γεωμετρία, στερεομετρία, μουσική και αστρονομία...».¹²



Διδασκαλία λύρας και δίσουλου (απέναντι). Ερυθρόμορφο αγγείο του Δούρι, 5ος αιώνας π.Χ. (Αρχαιολογικό Μουσείο, Βερολίνο)





Αριστερά, το αυτόματο του Ηρώνα του Αλεξανδρέως στο ναό από το «Περί Αυτοματοποιητικής». Πάνω, σύγχρονη ανακατασκευή της «ατμοκίνητης σφαίρας» του Ηρώνα

Ετσι, πολλοί φιλόσοφοι έγραψαν σχετικά έργα, συμβάλλοντας στην ανάπτυξη και της τέχνης και των οργάνων της. Οι κυριότεροι απ' αυτούς ήταν:

- **Δημόκριτος ο Αβδηρίτης** (460-370 π.Χ.), «Περί ρυθμών και αρμονίας».
- **Ηρακλείδης ο Ποντικός** (390-310 π.Χ.), «Περί Μουσικής» σε 3 βιβλία
- **Αριστόξενος ο Ταραντίνος** (370-... π.Χ.), «Αρμονικά Στοιχεία» σε 3 βιβλία (σώθηκε), «Περί Μουσικής», «Ιστορικό της Αρμονικής»
- **Ξενοκράτης ο Χαλκηδόνιος** (4ος αι. π.Χ.), «Περί διαστημάτων»
- **Ευκλείδης** (περί το 300 π.Χ.), «Κατατομή κανόνος»
- **Πλούταρχος ο Χαιρωνεύς** (46-126 μ.Χ.), «Περί Μουσικής»

Εκτός όμως των φιλοσόφων αυτών ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με τη μουσική, τις έννοιές της, την ιστορία της και την εκπαιδευτική της αξία και ο **Πλάτων** (*Νόμοι, Πολιτεία, Πρωταγόρας, Τίμαιος*) και ο **Αριστοτέλης** (*Μεταφυσικά, Πολιτικά, Τέχνη Ρητορική*) και βέβαια οι αντίστοιχοι εκπαιδευτικοί της Ακαδημίας και του Λυκείου.

5. Η ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ήταν η μαθηματική τέχνη της κατασκευής των

διαφόρων μηχανών με τη βοήθεια των οποίων υπηρετούνταν συνολικά οι ανάγκες της ζωής. Μερικές από αυτές ήταν οι αργαλειοί, οι ζυγοί, οι άμαξες, τα πλοία, οι ανυψωτικές μηχανές, οι μύλοι, οι φυστηρές, οι τόρνοι, τα οδόμετρα και άλλες.¹³

Οι μηχανές αυτές, μαζί με ένα πλήθος υπολογισμών, επέτρεπαν στους μηχανικούς τη μελέτη και την κατασκευή μεγάλων έργων, όπως αρχιτεκτονμάτων, υδραυλικών έργων, πλοίων, πολεμικών μηχανών και άλλων.

Οι φυσικοί νόμοι της λειτουργίας των απλών, αλλά και των συνθετοτέρων, μηχανών κατακτήθηκαν σταδιακά έπειτα από μελέτες της συσσωρευμένης εμπειρίας. Οι μελέτες αυτές κατά τον 5ο αι. π.Χ. ασκούσαν τόση γοητεία στους μαθηματικούς-φιλοσόφους, ώστε αυτοί να δηλώνουν ότι:

«...προτιμούν να ανακαλύψουν ένα φυσικό νόμο παρά να γίνουν βασιλείς των Περσών...».¹⁴

Ετσι άρχισαν από πολύ νωρίς να συγγράφονται διάφορα μηχανικά έργα, άλλα θεωρητικότερα για την ερμηνεία των φαινομένων και άλλα πρακτικό-



Φίλων ο Βυζάντιος, συγγραφέας της «Μηχανικής Συντάξεως» (φανταστική γκραβούρα)

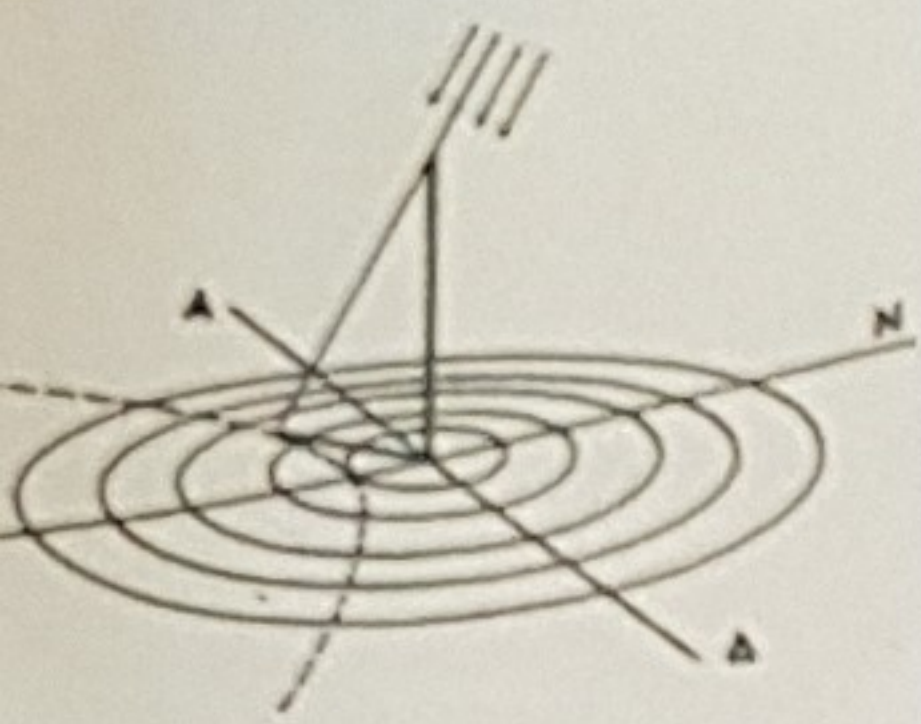
Με τη δίοπτρα του Ευπαλίνου του Μεγαρέα έγινε η χάραξη και κατασκευή του ορύγματος του υδραγωγείου της Σάμου

τερα με περιγραφές των διαφόρων μηχανών, και να συσσωρεύεται η γνώση στις διάφορες «σχολές» μηχανικών.

Από τα έργα αυτά και τους δημιουργούς τους σώθηκαν ελάχιστα. Τα κυριότερα από τα γνωστά ήταν τα παρακάτω:

- **Ευκλείδης** (περί το 300 π.Χ.), «Μηχανικά» (χάθηκαν)
- **Κτισίβιος ο Αλεξανδρεύς** (285-222 π.Χ.), «Μηχανική» (χάθηκαν), «Υπομνήματα Μηχανικά» (αποσπάσματα)
- **Αρχιμήδης ο Συρακούσιος** (287-212 π.Χ.), «Στοιχεία Μηχανικών» (χάθηκαν), «Στοιχεία επί των στηρίξεων» (χάθηκε), «Ισορροπίαι» και «Περί ζυγών» (χάθηκαν), «Κεντροβαρικά» και ▶





Σκιοθηρικός
γνώμων (6ος
αιώνας π.Χ.)

«Βαρυουλκός» (χάθηκαν), «Περὶ Δρομομέτρων» (χάθηκε)

• Βίτων (2ος αι π.Χ.), «Κατασκευαί πολεμικῶν ὀργάνων καὶ καταπελτικῶν»

• Φίλων ο Βυζάντιος (3ος-2ος αι. π.Χ.), «Μηχανικὴ Σύνταξις» (σε 9 βιβλία, σώθηκε το ένα)

• Αθήναιος (ίσως 2ος αι. π.Χ.), «Περὶ Μηχανημάτων»

• Ἡρών ο Αλεξανδρεὺς (1ος αι π.Χ.-1ος αι. μ.Χ.), «Μηχανικά» (σώθηκε στα αραβικά), «Περὶ Διόπτρας» (σώθηκε) «Περὶ Αυτοματοποιητικῆς» (σώθηκε)

Τα λίγα αὐτὰ ἔργα, με περιεχόμενό τους μηχανές καὶ ὄργανα κάθε εἶδους, δείχνουν το εκπληκτικὸ ἐπίπεδο τῆς ἀρχαίας ἐλληνικῆς τεχνολογίας. Τῆς τεχνολογίας ἐκείνης, που στα πρῶτα σχεδὸν βήματά τῆς ἀποτέλεσε τὸν κυριότερο ἀπὸ τοὺς παράγοντες τῆς νίκης τῶν Ἑλλήνων στα Περσικά.

Χάρη στὴν ἀστρονομία, κατορθώθηκε ἀπὸ τὸν 5ο αἰώνα π.Χ. νὰ χαρτογραφηθεῖ ὁ οὐρανὸς καὶ νὰ ἀνακαλυφθοῦν οἱ 5 πλανήτες

6. Η ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

Ἡ εκπληκτικότερη ἀπὸ τὶς ἀρχαίες ἐλληνικὲς τέχνες εἶχε σίτοχο τῆς τὴν παρακολουθῆση καὶ μέτρηση τῶν φαινομένων τοῦ ἑναστρου οὐρανοῦ. Ἡ μέτρηση αὐτὴ γινόταν με ὄργανα καὶ μεθόδους που εἶχαν ἐπινοήσῃ οἱ τότε ἀστρονόμοι, οἱ ὁποῖοι στὴ συνέχεια πρότειναν, διαμόρφωναν ἢ υιοθετοῦσαν κάποια θεωρία με τὴ βοήθεια τῆς ὁποίας «ἐσώζαν τὰ φαινόμενα» (ερμήνευαν τὰ δεδομένα τῆς παρατήρησης καὶ τῶν μετρήσεων).

Κλάδος τῆς ἀστρονομίας ἦταν ἡ **γνωμονικὴ** τέχνη, ἡ ὁποία με τὴ βοήθεια σκιοθηρικῶν γνωμόνων μετροῦσε τὸν ἡμερήσιο καὶ ετήσιο χρόνο. Αὐτὴ ἦταν προϊόν τῆς σύλληψης τῶν οὐράνιων κύκλων ἀπὸ τοὺς πρῶτους φυσικοὺς φιλόσοφους τῆς Ἰωνίας, καὶ τῆς κατανόησης τῆς ἡμερήσιας καὶ ετήσιας τροχίας τοῦ Ἡλίου στὸν γεωκεντρισμό.

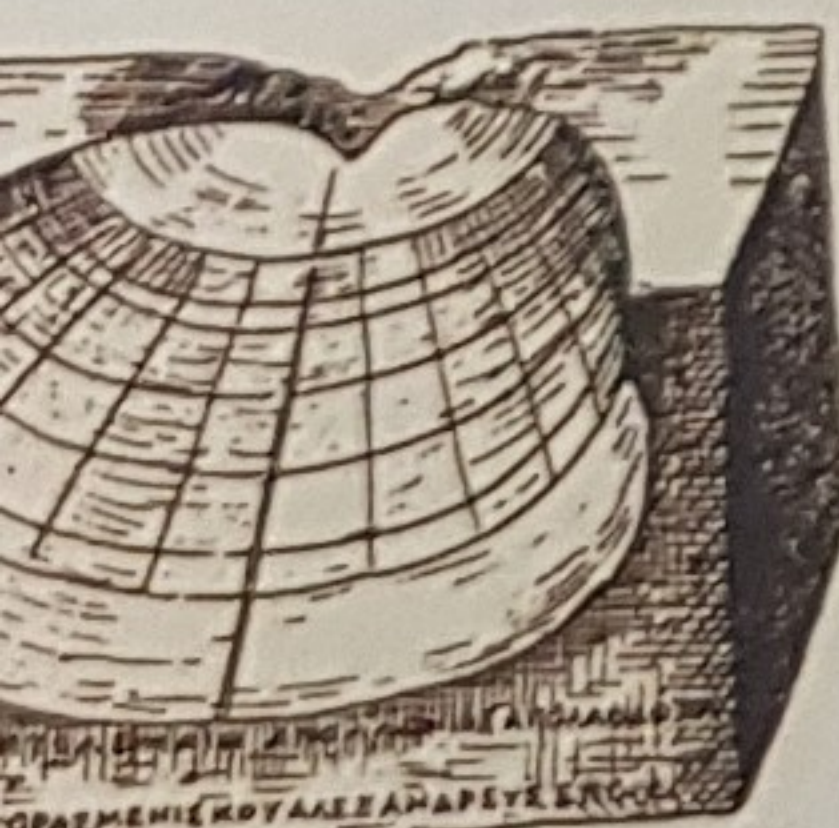
Με τὴ βοήθεια τῶν γνωμόνων πρῶτος ὁ **Θαλῆς ο Μιλήσιος** (624-546 π.Χ.):

- προσδιόρισε τὴ μαθηματικὴ διεύθυνση Βορρὰς-Νότος,
- μετρήσε τὴ διάρκεια τοῦ ἔτους, σε 365 ἡμέρες,¹⁵
- μετρήσε τὸ ὕψος τῶν Πυραμίδων στὴν Αἴγυπτο.¹⁶

Κλάδος τῆς ἀρχαίας ἐλληνικῆς ἀστρονομίας οὐσιαστικά ἦταν καὶ ἡ **μαθηματικὴ γεωγραφία**, ἡ ὁποία ὅμως μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ καὶ ὡς κλάδος τῆς ἀρχαίας ἐλληνικῆς γεωδαισίας.

Ἡ γεωγραφία αὐτὴ, μόνη στὴν ἀρχαιότητα:

Ἡλιακὸ ωρολόγι
τοῦ Ἀπολλωνίου
(220 π.Χ.)



Ἀναξίμανδρος ὁ Μιλήσιος. Προσωκρατικὸς φιλόσοφος. Ἀνάγλυφη κεφαλὴ, ρωμαϊκὸ ἀντίγραφο προτομῆς τοῦ 4ου αἰώνα (Μουσεῖο Θερμῶν, Ρώμη). Δίπλα, ἡ κοσμογραφία τοῦ Ἰππάρχου τυπωμένη στὸ Λονδίνο τὸ 1559

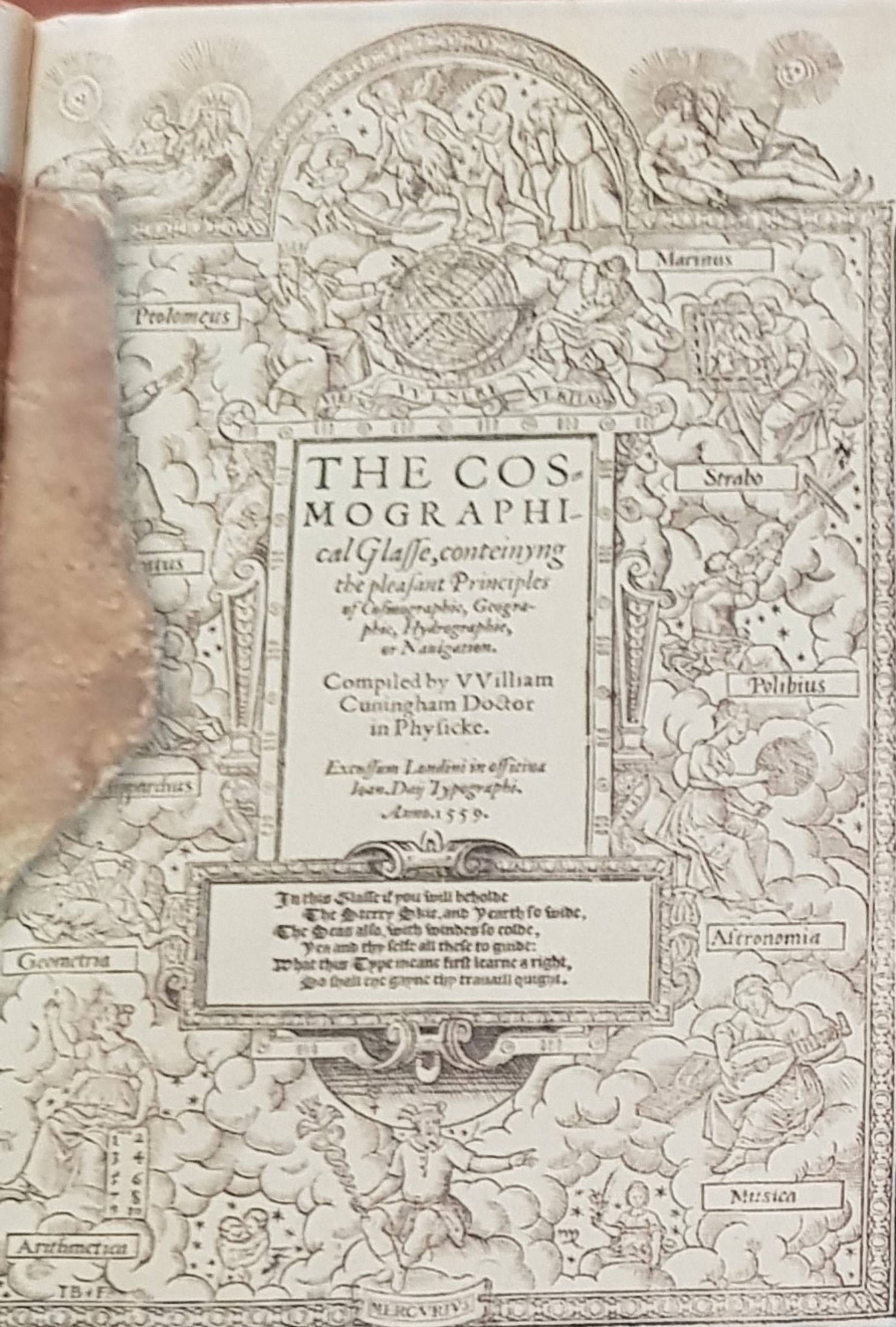
- ἀπέδειξε τὴ σφαιρικότητα τῆς Γῆς (4ος αἰ. π.Χ.),
- μετρήσε τὴν περίμετρό τῆς (3ος αἰ. π.Χ.),¹⁷
- ὅρισε τοὺς γήινους κύκλους.

Ἡ κυρίως ἀστρονομία τῶν Ἑλλήνων ἀπὸ τὴν ἀρχαϊκὴ ἀκόμη ἐποχὴ (7ος-6ος αἰ. π.Χ.) ἐγίνε μαθηματικὴ καὶ πραγματοποιήσε εκπληκτικὲς ἀνακαλύψεις, ἀν καὶ δὲν κατόρθωσε νὰ ἀπαλλαγεῖ ἀπὸ τὴν προσήλωσή τῆς στὸ γεωκεντρικὸ μοντέλο.

Αὐτὴ, ἐφοδιασμένη με μεθόδους καὶ ὄργανα δικῆς τῆς ἐμπνευσης, κατόρθωσε ἤδη ἀπὸ τὸν 5ο αἰ. π.Χ.:

- νὰ χαρτογραφήσῃ τὸν Οὐρανὸ (Οἰνοπίδης, Δημόκριτος),
- νὰ ἀνακαλύψῃ τοὺς 5 πλανήτες, καὶ
- νὰ συλλάβῃ τοὺς βασικοὺς οὐράνιους κύκλους καὶ νὰ μετρήσῃ τὴ σχέση τοὺς με τὸ λοξὸ κύκλο τῶν πλανητῶν.

Οἱ συνεχεῖς ἐρευνὲς τῆς βοήθησαν στὴν ἀνάπτυξη τῆς μαθηματικῆς γεωγραφίας καὶ τῆς μοναδικῆς ἐλληνικῆς **τριγωνομετρίας**.¹⁸ Ταυτόχρονα ἐπέτρεψαν τὴν ἀκριβὴ μέτρηση τῆς διάρκειας τοῦ ἔτους καὶ τὴ συγκρότηση ἀπὸ τὸν **Κλεόστρατο τὸν Τενέδιο** (περὶ τὸ 530 π.Χ.) τῆς περίφημης **Οκταετηρίδας** (περιόδου 8 εἰῶν, που τὸ καθένα περιεῖχε ἀκέραιο πλῆθος ἡμερῶν καὶ σεληνιακῶν μηνῶν),



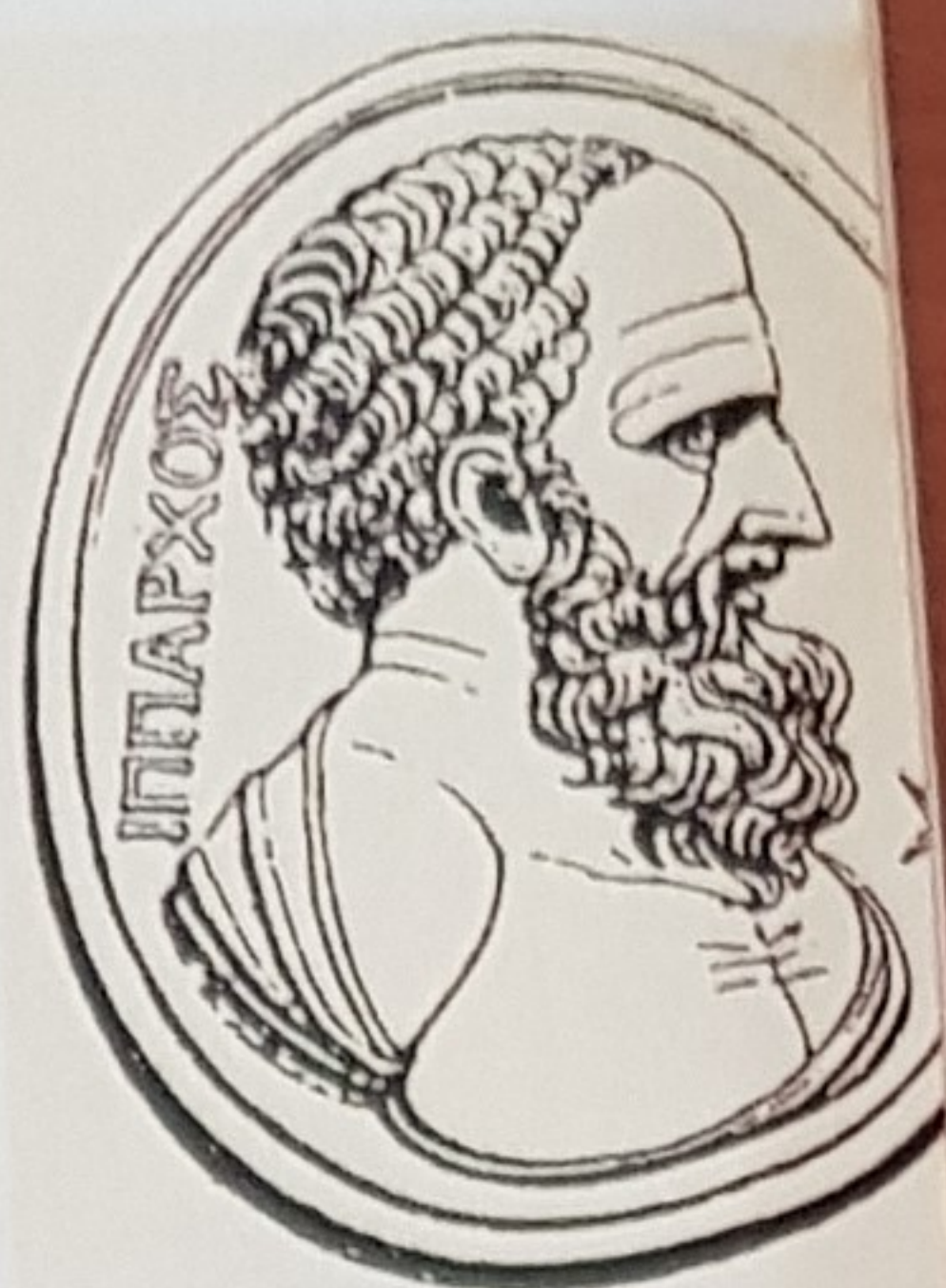
γας και μικρός Διακόσμος», «Κοσμογραφία» και «Ουρανογραφία» (σχέδια ουρανού), «Μέγας ενι-αυτός ή Αστρονομία», «Περί των Πλανήτων»

Ακολούθησαν και άλλοι πολλοί με κορυφαίο τον **Ιππαρχο** (190-120 π.Χ.) από τη Νίκαια της Βιθυνίας. Ο Πλάτων (περί το 380 π.Χ.) ασχολήθηκε με θέματα αστρονομίας σε τέσσερα έργα του,²⁰ ενώ ο **Αριστοτέλης** σε τρία.²¹ Από τις ιστορίες δε που γράφθηκαν για την αστρονομία είναι γνωστές τρεις.²²

Τελικά η ολοκλήρωση και οργάνωση της μαθηματικής αστρονομίας έγινε απο τον **Ιππαρχο**, το 2ο αι. π.Χ., και τους **Ποσειδώνιο** (περί το 90 π.Χ.) και **Γεμίνιο** (περί το 70 π.Χ.)

Τα συνολικά αποτελέσματά της διασώθηκαν από τον **Κλαύδιο Πτολεμαίο** (100-178 μ.Χ.) στο έργο του «**Μαθηματική Σύνταξις**», στο οποίο αναπτύσσονται όλες οι απόψεις, οι μετρήσεις και οι μέθοδοι των προγενέστερων αστρονόμων.

Η αστρονομία ήταν η λαμπρότερη των μαθηματικών τεχνών και ασχολήθηκαν μαζί της σχεδόν όλοι οι Έλληνες φιλόσοφοι



Ιππαρχος ο Νικαεύς (190-120 π.Χ.). Ο μέγιστος των Ελλήνων αστρονόμων

με τη βοήθεια της οποίας αναπτύχθηκαν τα ελληνικά τοπικά ημερολόγια.¹⁹

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι η αστρονομία ήταν η λαμπρότερη των μαθηματικών τεχνών, ότι μαζί της ασχολήθηκαν σχεδόν όλοι οι Έλληνες φιλόσοφοι και τέλος ότι με τις μελέτες της συνέβαλε:

- στη γεωκεντρική ερμηνεία των φαινομένων του ουρανού,
- στη δημιουργία της ελληνικής μαθηματικής γεωγραφίας,
- στη δημιουργία της μοναδικής ελληνικής τριγωνομετρίας,
- στην ανάπτυξη σκοπευτικών οργάνων και μεθόδων, τα οποία υπηρέτησαν και ανέπτυξαν την ελληνική γεωδαισία, και τέλος
- στην ανάπτυξη των εξαιρετικών ελληνικών ημερολογίων.

Το πολυσήμαντο της τέχνης αυτής φαίνεται και στο πλήθος των έργων της αρχαίας βιβλιογραφίας που διασώθηκε. Ενδεικτικά αναφέρουμε:

- **Θαλής ο Μιλήσιος** (624-546 π.Χ.), «Περί Τροπής και Ισημερίας», «Περί Μετεώρων»
- **Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος** (610-547 π.Χ.), «Περί των Απλανών»
- **Κλεόστρατος ο Τενέδιος** (περί το 530 π.Χ.), «Αστρολογία» και «Οκταετηρίς»
- **Δημόκριτος ο Αβδηρίτης** (460-370 π.Χ.), «Μέ-

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Ηρώων «Ορισμοί», 138.
2. Πλουτάρχου «Συμποσιακά προβλήματα» και Πλάτωνος «Πολιτεία» 526ε.
3. Ηρώων «Μετρικά» (Α,8 και Γ,20).
4. Πλάτωνος «Νόμοι» 747b (περί το 355 π.Χ.).
5. Αριστοτέλους «Μετά τα Φυσικά» 997b (περί το 340 π.Χ.).
6. Πλάτωνος «Φίλητος» 55,ε.
7. Ηρώων «Ορισμοί» 135,7.
8. Πρόκλου «Εις το α' των Στοιχείων» σελ. 25. Friedlein (περί το 450 μ.Χ.).
9. Βιτρούβιου «Περί Αρχιτεκτονικής» VII προοίμιον.
10. Ηρώων «Περί Διόπτρας» γ και δ.
11. Θέωνος Σμυρναίου «...Εις Πλάτωνος ανάγνωσιν», σελ. 58-59 (E. Hiller).
12. Θέωνος Σμυρναίου «...Εις Πλάτωνος ανάγνωσιν», σελ. 15.
13. Βιτρούβιου «Περί Αρχιτεκτονικής» X.
14. «Προσωκρατικοί φιλόσοφοι», H. Diels, απόσπασμα 118 για τον Δημόκριτο.
15. Διογένης Λαέρτιος, «Βίοι Φιλοσόφων, Θαλής» I,27.
16. Πλούταρχος, Πλίνιος, Διογένης Λαέρτιος I, 27.
17. Αρχιμήδης (Ιππόλυτος) και Ερατοσθένης (Κλεομήδης).
18. Πτολεμαίου «Μαθηματική Σύνταξις» I,9.
19. Γεμίνου «Εισαγωγή εις τα φαινόμενα» VIII.
20. Πλάτωνος «Τίμαιος», «Πολιτεία» «Νόμοι» και «Επινόμις».
21. Αριστοτέλους «Περί Ουρανού», «Μετά τα φυσικά» και «Μετεωρολογικά».
22. Του Ξενοκράτους (περί 340 π.Χ.), του Θεόφραστου (περί το 330 π.Χ.) και του Εύδημου (περί το 320 π.Χ.).

Ο Ποσειδώνιος. Γκραβούρα βασισμένη σε προτομή του



Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Του ΓΙΑΝΝΗ ΘΩΜΑΙΔΗ
δρος Μαθηματικών, Πειραματικό Σχολείο Παν/μίου
Μακεδονίας



Ο

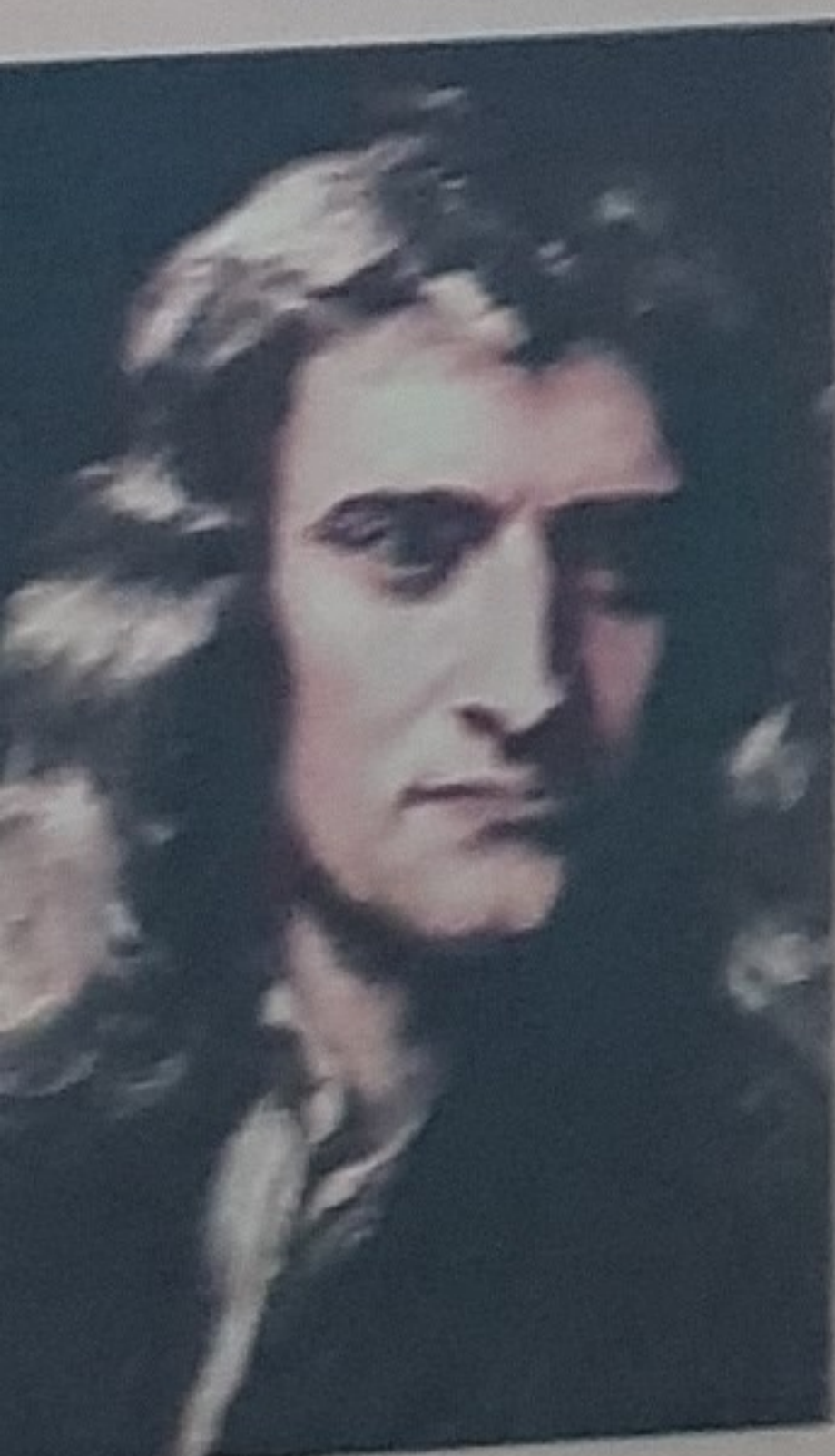
διαπρεπής σύγχρονος ιστορικός των μαθηματικών **I. Grattan-Guinness**, στο 2ο κεφάλαιο του βιβλίου του *Ιστορία των Μαθηματικών Επιστημών* (Fontana Press, 1997) αναφέρει ότι από όλους τους αρχαίους πολιτισμούς, οι Έλληνες είχαν ασυζητητί την πιο μεγάλη επίδραση στην ανάπτυξη των μαθηματικών στην Ευρώπη. Αυτή η δήλωση δεν αποτελεί κατακλείδα κάποιας ιστορικής ερμηνείας, αλλά συνοψίζει ένα ιστορικό γεγονός μεγάλης σημασίας, που τεκμηριώνεται και ευθείαν από τις πηγές. Όλοι οι μεγάλοι πρωτοπόροι της νεότερης επιστήμης – **Φερμά (Fermat)**, **Ντεκάρτ (Descartes)**, **Κέπλερ (Kepler)**, **Νεύτων (Newton)**, **Λάιμπνιτς (Leibnitz)** κ.ά. – έχουν αναγνωρίσει με άμεσο και κατηγορηματικό τρόπο τις πολλαπλές οφειλές τους στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά.

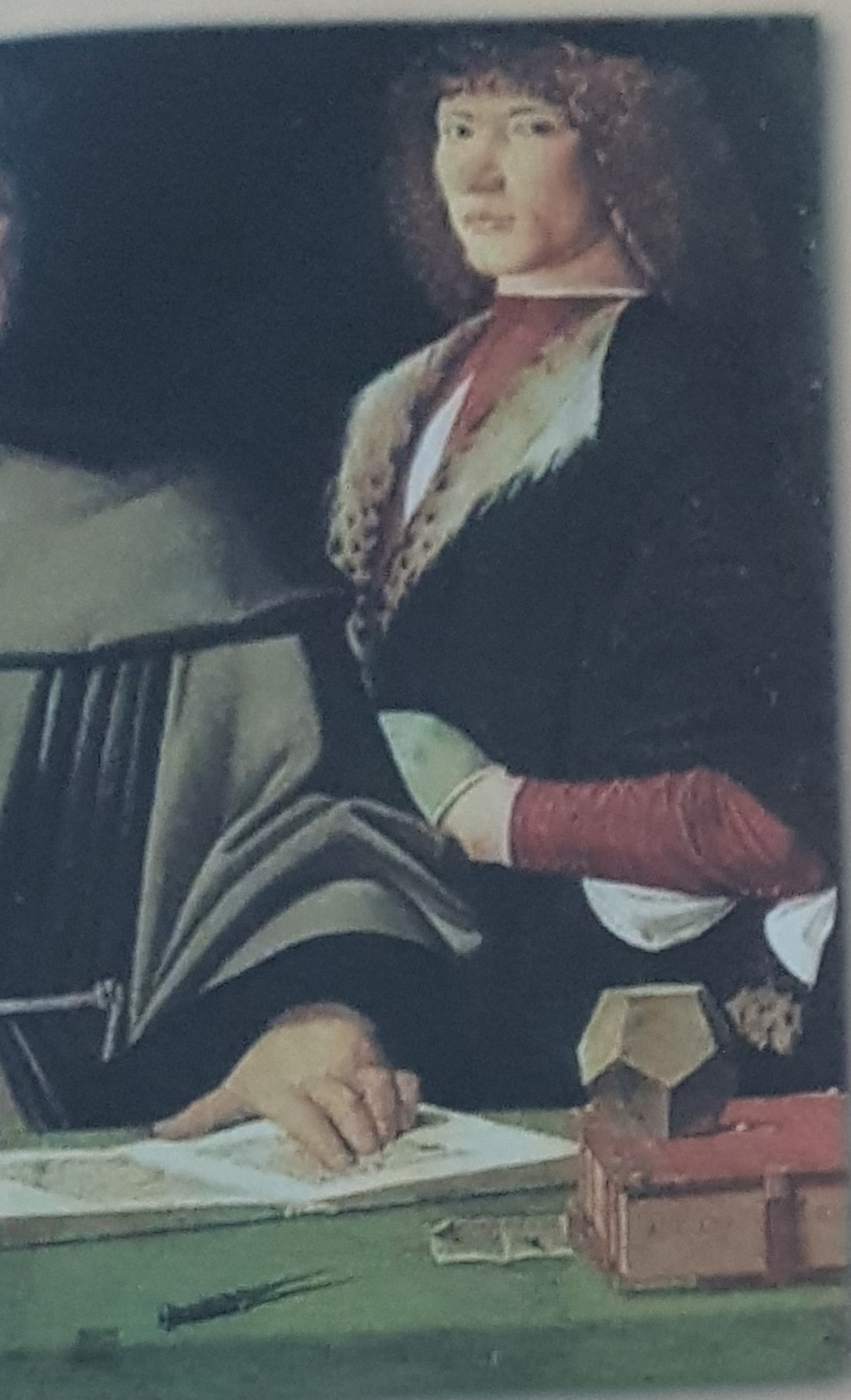
Στο σημείο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με την επίδραση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών στην ανάπτυξη της νεότερης επιστήμης, αλλά με τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά ως αντικείμενο της ιστορικής έρευνας. Αιτή είναι μια επιστημονική δραστηριότητα η οποία έχει, στη σύγχρονη εποχή, ηλικία τουλάχιστον δύο αιώνων (αν λάβουμε ως συμβατικό σημείο αφετηρίας την ανακάλυψη το 1808, από τον **F. Peyrard**, ενός άγνωστου μέχρι

τότε χειρογράφου των Στοιχείων του **Ευκλείδη** στη βιβλιοθήκη του Βατικανού). Η συστηματική, από τότε, μελέτη των πηγών είχε αποτέλεσμα να πραγματοποιηθούν στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ού αιώνα κριτικές εκδόσεις των έργων των σημαντικότερων αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών (**Ευκλείδης**, **Αρχιμήδης**, **Απολλώνιος**, **Ηρων**, **Διόφαντος**, **Πτολεμαίος**, **Πάππος**), με την επιμέλεια διαπρεπών φιλολόγων και ιστορικών όπως οι **J. Heiberg**, **H. Menge**, **H. Schöne**, **P. Tannery**, **F. Hultsch**, **P. ver Eecke** κ.ά.

Οι εκδόσεις αυτές έκαναν δυνατή τη συγκρότηση μιας συνολικής εικόνας για τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, οδήγησαν στη δημοσίευση μιας σειράς ιστορικών έργων και έθεσαν τις βάσεις για τη δημιουργία ενός δραστήριου ερευνητικού κλάδου στο χώρο της ιστορίας των επιστημών. Ανάμεσα στα πιο φημισμένα ιστορικά έργα που δημοσιεύτηκαν περίπου μέχρι τα μέσα του 20ού αιώνα συγκαταλέγονται η *Θεωρία των Κωνικών Τομών κατά την Αρχαιότητα* του **H. Zeuthen** (1886), τα *Δεκατρία Βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη* (1908) και η διτομή *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών* (1921) του **sir T. Heath**, η *Ιστορία των Μαθηματικών Επιστημών στην Ελληνική Αρχαιότητα* του **G. Loria**

Ο Ισαάκ Νεύτων





(1929), *Η Αφύπνιση της Επιστήμης* του B. van der Waerden (1950) και οι *Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα* του O. Neugebauer (1957).

Τα προηγούμενα ιστορικά έργα καθιέρωσαν μια ερμηνεία για την εξέλιξη των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, η οποία διαδόθηκε ευρύτατα μέσα από τα πολυάριθμα βιβλία Ιστορίας των Μαθηματικών που κυκλοφόρησαν μεταπολεμικά.

Σύμφωνα με την ερμηνεία αυτή, η δημιουργία των ελληνικών μαθηματικών οφείλεται στη δραστηριότητα φυσικών φιλοσόφων όπως ο Θαλής και ο Πυθαγόρας, οι οποίοι γνώρισαν τις εμπειρικές μαθηματικές γνώσεις άλλων πολιτισμών ταξιδεύοντας στην Αίγυπτο και τη Μέση Ανατολή. Η εξέταση αυτών των γνώσεων με την κριτική και ορθολογική μέθοδο, που αποτελούσαν χαρακτηριστικά στοιχεία της ελληνικής σκέψης, έφερε στο προσκήνιο θεμελιώδη ζητήματα και προβλήματα που οδήγησαν σε ένα ριζικό μετασχηματισμό τους. Νέο πρότυπο οργάνωσης και παρουσίας των γνώσεων έγινε η ένταξή τους σ' ένα θεωρητικό σύστημα, με κύρια γνωρίσματα την αξιωματική θεμελίωση και τη λογική απόδειξη. Κεντρικό ζήτημα αυτής της εξέλιξης υπήρξε η ανακάλυψη της ύπαρξης ασύμμετρων μεγεθών που οδήγησε σε μια κρίση θεμε-

λιών, για το ξεπέρασμα της οποίας απαιτήθηκε η βαθμιαία γεωμετρικοποίηση των αριθμητικών και αλγεβρικών μεθόδων των προελληνικών μαθηματικών. Αυτή η προσπάθεια είχε αποτέλεσμα την καθολική επικράτηση του θεωρητικού μοντέλου που χρησιμοποίησε ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία*.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της ιστορικής μεθόδου ανάλυσης και ερμηνείας που χρησιμοποιήσαν οι ιστορικοί των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών της πρώτης πεντηκονταετίας του 20ού αιώνα αποτελεί η επινόηση του όρου «γεωμετρική άλγεβρα». Με τον όρο αυτό, ένα σύνολο ιδιόμορφων γεωμετρικών τεχνικών που χρησιμοποιούσαν οι Έλληνες μαθηματικοί ερμηνεύτηκε αρχικά, μέσα από το πρίσμα των σύγχρονων μαθηματικών, ως «γεωμετρική απόδειξη αλγεβρικών ταυτοτήτων ή γεωμετρική επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων». Στη συνέχεια, όταν ήρθαν στο φως αρχαιολογικά ευρήματα για τα βαβυλωνιακά μαθηματικά, η ιστορική αυτή ερμηνεία ισχυροποιήθηκε με το επιχείρημα ότι οι προελληνικές αλγεβρικές μέθοδοι αντικαταστάθηκαν από τους αρχαίους Έλληνες με αντίστοιχες γεωμετρικές.

Πίσω από αυτά τα ερμηνευτικά σχήματα υποκρύπτεται η αντίληψη για τον ιδεατό, αιώνιο και αναλλοίωτο χαρακτήρα των μαθηματικών εννοιών και την ύπαρξη ενός αντίστοιχου προτύπου ορθολογικής σκέψης. Οι ιστορικοί επιχείρησαν να ανακαλύψουν στα αρχαία κείμενα τα στοιχεία εκείνα που θα πιστοποιούσαν την προοδευτική εξέλιξη, από τις αρχαίες και ατελείς, προς τις σημερινές και τελειοποιημένες μορφές των μαθηματικών εννοιών. Η επινόηση του όρου «γεωμετρική άλγεβρα» αποκαλύπτει ακριβώς τη μεθοδολογική τάση για αναζήτηση κάποιας κανονικότητας και συνέχειας μέσα σε διαφορετικές μαθηματικές παραδόσεις.

Η ωρίμανση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, η περίοδος της ακμής με τα μεγάλα έργα της ελληνιστικής περιόδου, η «παρακμή» τους στη διάρκεια της ρωμαϊκής περιόδου και η επίδραση που είχαν στη δημιουργία της νεότερης επιστήμης, που είχαν στη δημιουργία της νεότερης επιστήμης, παρουσιάστηκαν επίσης σύμφωνα με αυτή την κυρίαρχη, κανονιστική αντίληψη. Οι μαθηματικές παραδόσεις δύο μεταγενέστερων πολιτισμών, του αραβικού και του βυζαντινού, παρουσιάστηκαν κυρίως ως οι απαραίτητες «γέφυρες» μέσω των οποίων τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά «μεταβιβάστηκαν» στη Δυτική Ευρώπη και συνέβαλαν αποφασιστικά στην επιστημονική επανάσταση του 17ου αιώνα και τη δημιουργία των σύγχρονων μαθηματικών.

Οι πρώτες ρωγμές σ' αυτήν την καθιερωμένη εικόνα της ιστορικής εξέλιξης των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών εμφανίστηκαν στη διάρκεια της δεκαετίας του 1960, όταν η ιστορική έρευνα άρχισε να αποστασιοποιείται από τις «κανονιστικές» ερμηνείες και να εμπλουτίζεται με νέα εργαλεία. Με

Πολύεδρο.
Πίνακας (1495)
του Jacopo de
Barbari. Η
κεντρική φιγούρα
του Luca Pacioli
δείχνει τη σχέση
μεταξύ τέχνης και
μαθηματικών

Ο ιστορικός των
μαθηματικών
Bartel Leender
van der Waerden



Βαβυλωνιακή
πλάκα (1000
π.Χ.). Παρά τις
απόπειρες
ταύτισής της με
το Πυθαγόρειο
θεώρημα, η σχέση
της μαζί του είναι
πολύ μακρινή.
Από κάτω, οι
μαθηματικοί
Ντεκάρτ
(αριστερά) και
Λάιμπνιτς (δεξιά)

Βάση λεπτές φιλολογικές αναλύσεις των αρχαίων κειμένων, ο **A. Szabo** (1913-2001), στο βιβλίο του *Απαρχές των Ελληνικών Μαθηματικών* (Oldenbourg, 1969· ελληνική μετάφραση 1973), επιχείρησε να δείξει ότι τα ζητήματα της ασυμμετρίας, της λογικής θεμελίωσης και της απόδειξης συνδέονται άμεσα με τη διαλεκτική των προσωκρατικών φιλοσόφων και την πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής, και ότι δεν έχουν σχέση με την υποτιθέμενη επίδραση και «γεωμετρικοποίηση» προελληνικών μαθηματικών γνώσεων. Το έργο του Szabo θεωρείται σήμερα πρωτοποριακό, όχι τόσο για τα συμπεράσματά του όσο για τις νέες μεθόδους που εισήγαγε στην ιστορική έρευνα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Η ανάλυση κειμένων από διαφορετικά γνωστικά πεδία που απασχόλησαν την αρχαία ελληνική σκέψη έδειξε ότι τα αρχαία ελληνικά μαθηματικά μπορούν να ερμηνευτούν και να κατανοηθούν ως προϊόν μιας ιδιαίτερης πολιτισμικής παράδοσης, χωρίς να είναι αναγκαία η χρήση σύγχρονων μαθηματικών ανακατασκευών. Είναι χαρακτηριστικό ότι ο Szabo κλείνει το βιβλίο του με ένα παράρτημα, στο οποίο δείχνει ότι η λεγόμενη «γεωμετρική άλγεβρα» δεν ήταν ούτε άλγεβρα ούτε κάποιο υποκατάστατο των βαβυλωνιακών μαθηματικών. Ήταν μια συλλογή αυθεντικών γεωμετρικών προτάσεων που εξυπηρετούσε βασικές εσωτερικές ανάγκες επίλυσης των προβλημάτων της θεωρητικής γεωμετρίας.

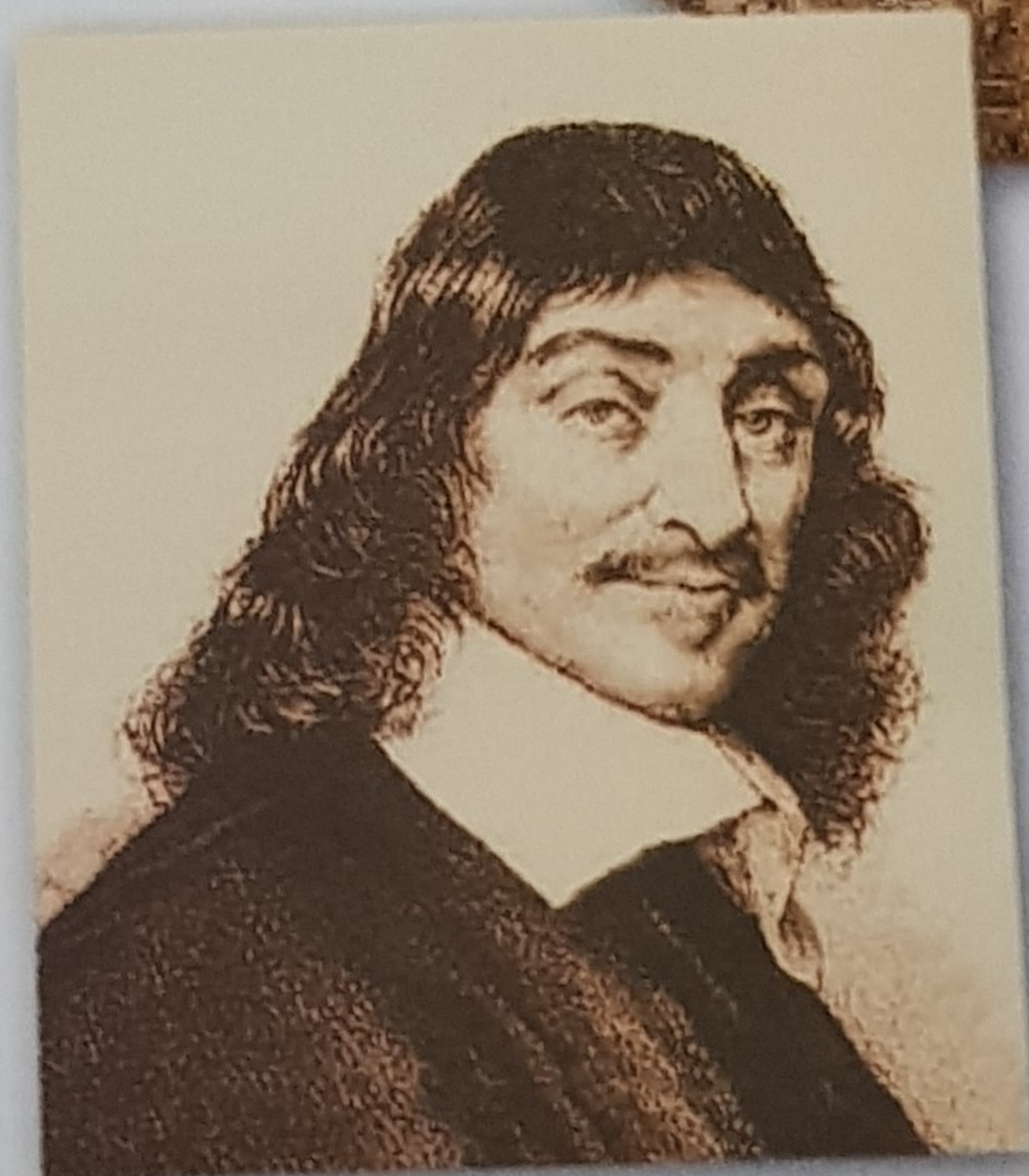
Μια άλλη ρωγμή της παραδοσιακής εικόνας δημιουργήθηκε από το βιβλίο του **W. Burkert** *Παράδοση και Επιστήμη στον Αρχαίο Πυθαγορισμό* (Harvard University Press, 1972· αγγλική μετάφραση της γερμανικής έκδοσης του 1962). Αμφισβητώντας και αυτός την ερμηνευτική εμβέλεια των μαθηματικών ανακατασκευών, ο Burkert έδε-

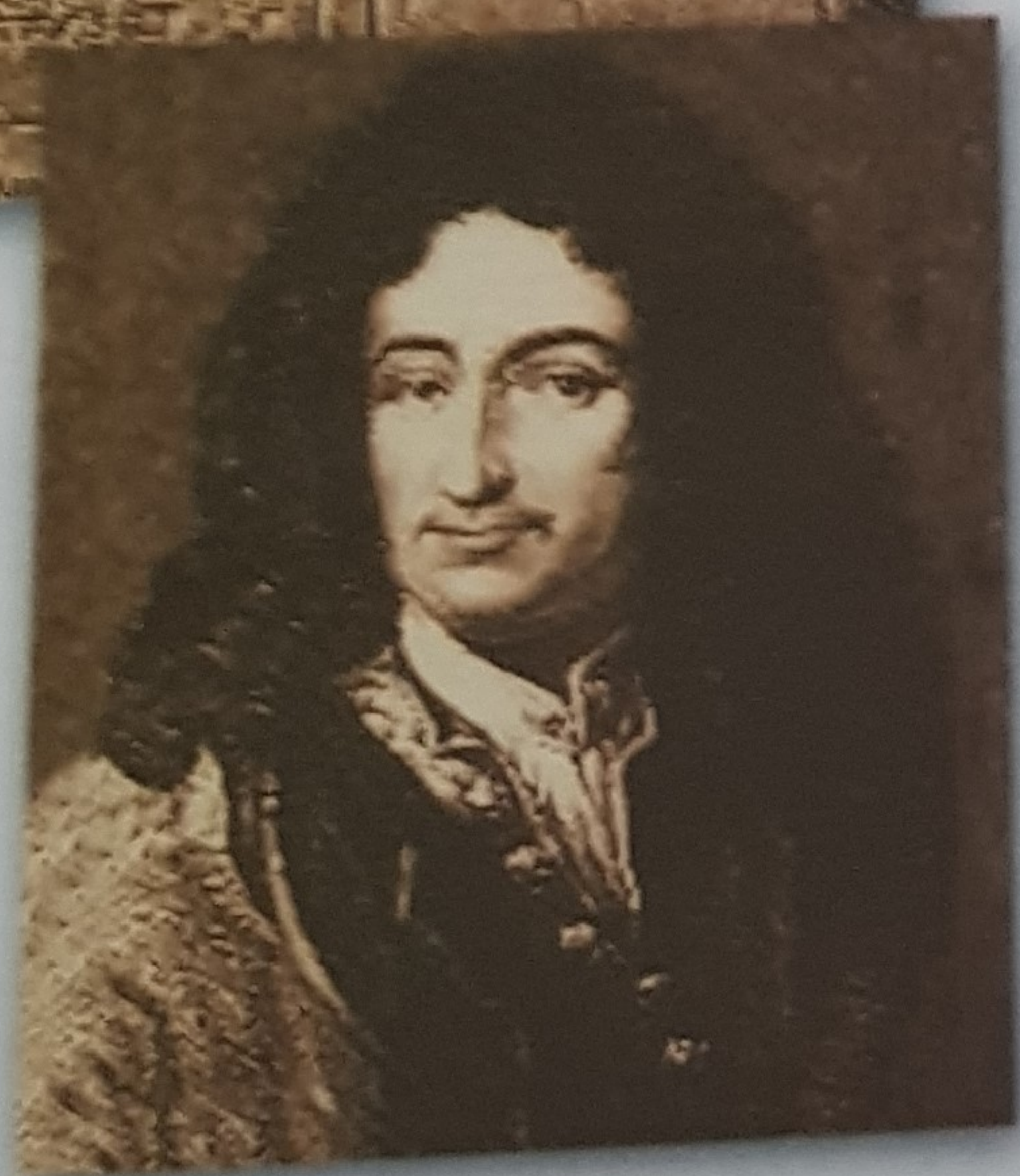
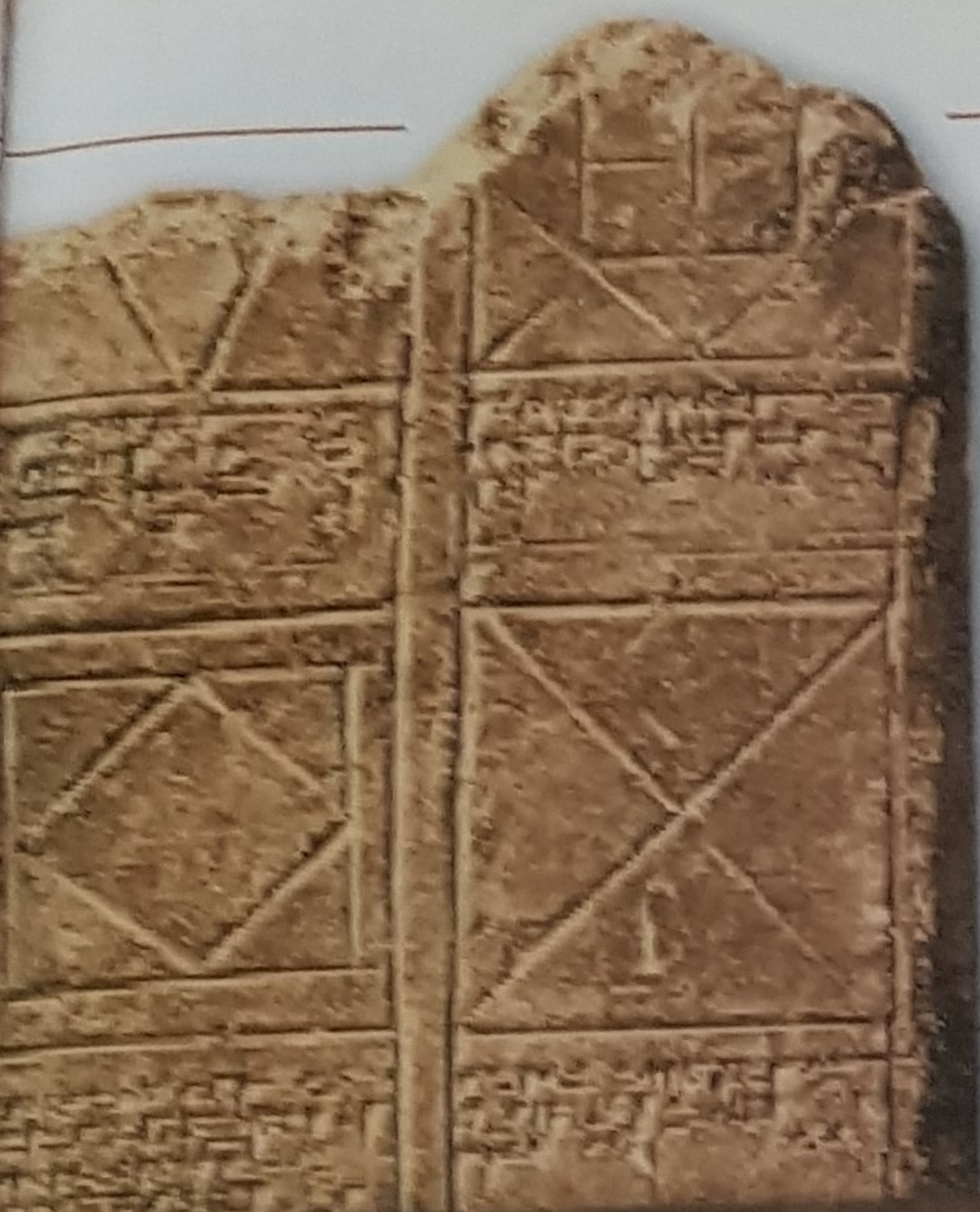
Εμπειρικές γνώσεις εντάχθηκαν σ' ένα θεωρητικό σύστημα, με κύρια γνωρίσματα την αξιωματική θεμελίωση και τη λογική απόδειξη

σε σε μια οξυτάτη κριτική ανάλυση τα αρχαία κείμενα με βάση τα οποία οι παλαιότεροι ιστορικοί κατέταξαν τον Πυθαγόρα στη θέση του θεμελιωτή των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Απορρίπτοντας αυτή τη θέση, ο Burkert εγκαινίασε μια νέα κατεύθυνση ερευνών για το ρόλο του Πυθαγόρα και των Πυθαγορείων στη διαμόρφωση του ιδιαίτερου χαρακτήρα των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών. Σ' αυτή την κατεύθυνση ανήκουν, μεταξύ άλλων, και τα έργα *Οι Πυθαγόρειοι: Θρησκευτική Αδελφότητα και Σχολή Επιστήμης* (Artemis Verlag,

1979) του **B. van der Waerden** και *Επιστήμη, Φιλοσοφία και Θρησκεία στον πρώιμο Πυθαγορισμό* (Akademik Verlag, 1997) του **L. Zhmud**.

Μια πολεμική διάσταση ανάμεσα στην παραδοσιακή και την αναδυόμενη νέα αντίληψη για την ιστορική εξέλιξη των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών, έδωσε ένα επικριτικό άρθρο του ιστορικού **S. Unguru** που δημοσιεύθηκε το 1975 στο περιοδικό *Archive for the History of Exact Sciences*, με τίτλο *Σχετικά με την ανάγκη να ξαναγραφτεί η ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*. Στο άρθρο αυτό ο Unguru αμφισβήτησε ανοιχτά και έντονα την παραδοσιακή μέθοδο ερμηνείας μέσω μαθηματικών ανακατασκευών, θέτοντας ιδιαίτερα στο στόχαστρο το ζήτημα της «γεωμετρικής άλγεβρας» και τις υποτιθέμενες «μεταβιβά-





σεις» από τους Βαβυλώνιους προς τους αρχαίους Έλληνες. Η πολεμική του Unguru, που έγινε από τη σκοπιά των νεότερων εξελίξεων στην ιστοριογραφία των επιστημών (ιδιαίτερα τις συνδεόμενες με το έργο του **T. Kuhn**), απαντήθηκε εξίσου έντονα από τους οπαδούς της παραδοσιακής σχολής ιστοριογραφίας και εξέχοντες μαθηματικούς **B. van der Waerden**, **A. Weyl** και **H. Freudenthal**.

Ο Waerden επανήλθε με το βιβλίο *Γεωμετρία και Αλγεβρα στους Αρχαίους Πολιτισμούς* (Springer Verlag, 1983), στο οποίο επιχειρήσε να προεκτείνει την παραδοσιακή ερμηνεία συνδέοντας τα ελληνικά μαθηματικά με μια προϊστορική παράδοση. Διακρίνοντας, από τη σκοπιά του σύγχρονου μαθηματικού και ιστορικού, ορισμένες ομοιότητες ανάμεσα στα αιγυπτιακά, βαβυλωνιακά, κινεζικά, ινδικά και ελληνικά μαθηματικά, διατύπωσε την υπόθεση μιας κοινής ρίζας όλων των

προηγούμενων στις πρωτόγονες μαθηματικές γνώσεις των ινδοευρωπαϊκών φύλων της Κεντρικής Ευρώπης κατά τις 4η και 3η χιλιετίες π.Χ.

Απέναντι σ' αυτές τις ερμηνευτικές παρεμβάσεις με αναγωγές στο απώτατο παρελθόν, η πρόσφατη ιστοριογραφία των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών έχει να αντιπαραθέσει μια σειρά ιδιαίτερα σημαντικών έργων που έχουν διαφορετική μεθοδολογική αφετηρία και χρησιμοποιούν διαφορετικά εργαλεία ανάλυσης και ερμηνείας. Με χρονολογική σειρά έκδοσης τα έργα αυτά είναι τα εξής:

– *Η Ανέλιξη των Στοιχείων του Ευκλείδη* του **W. Knorr** (Reidel, 1975).

– *Φιλοσοφία των Μαθηματικών και Απαγωγική Δομή στα Στοιχεία του Ευκλείδη* του **I. Mueller** (The M.I.T. Press, 1981).

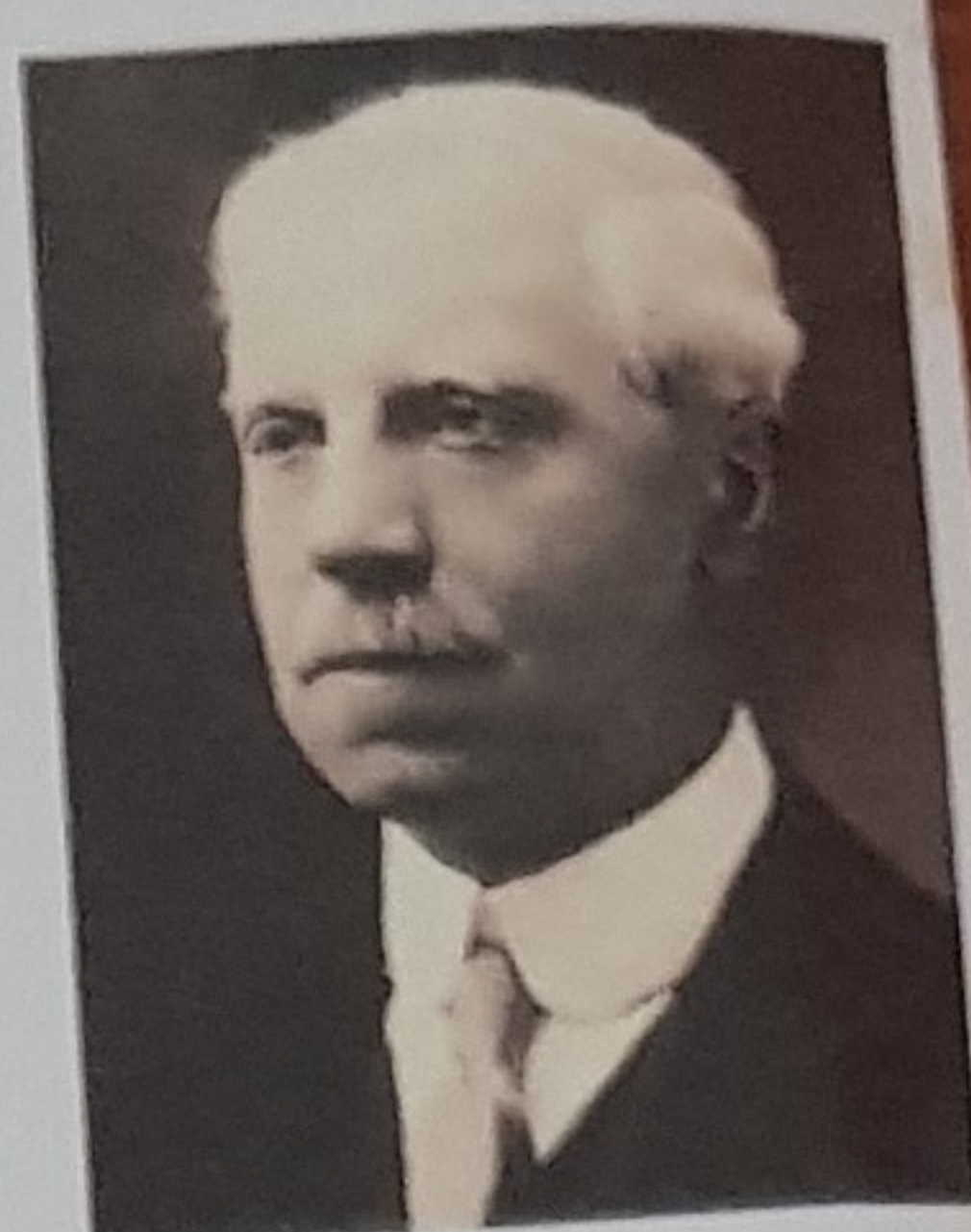
– *Η Αρχαία Παράδοση των Γεωμετρικών Προβλημάτων* του **W. Knorr** (Birkhäuser, 1986).

– *Τα Μαθηματικά της Ακαδημίας του Πλάτωνα* του **D. Fowler** (Clarendon Press, 1987· 2η έκδοση 1999).

– *Μελέτες Κειμένων της Αρχαίας και Μεσαιωνικής Γεωμετρίας* του **W. Knorr** (Birkhäuser, 1989).

– *Η Διαμόρφωση της Απαγωγής στα Ελληνικά Μαθηματικά* του **R. Netz** (Cambridge University Press, 1999).

Στα προηγούμενα έργα επιχειρείται μια πολύπλευρη προσέγγιση, η οποία συνδυάζει την εκ νέου ανάγνωση των αρχαίων μαθηματικών κειμένων με τη μελέτη των άλλων πτυχών της ελληνικής σκέψης και του ελληνικού πολιτισμού. Ο συνδυασμός αυτός επιδιώκει ν' αναδείξει τις αλληλεπιδράσεις, την ύπαρξη των οποίων καθιστά σχεδόν αυτονόητη το γεγονός ότι χαρακτηριστικό γνώρισμα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών δεν ήταν η



Ο συγγραφέας της «Ιστορίας των Ελληνικών Μαθηματικών» σερ Τόμας Χιθ

Οι ιστορικοί επιχειρήσαν να πιστοποιήσουν την προοδευτική εξέλιξη από τις αρχαίες προς τις σημερινές μορφές των μαθηματικών εννοιών

στενή εξειδίκευση αλλά η διεπιστημονικότητα.

Σε μια κατ' ανάγκην τηλεγραφική, λόγω χώρου, παρουσίαση θα επισημάνουμε αρχικά το γεγονός ότι τα προηγούμενα έργα έχουν αρχίσει να διαμορφώνουν μια διαφορετική εικόνα για τη δημιουργία και την εξέλιξη της ελληνικής μαθηματικής παράδοσης αλλά και να θέτουν ορισμένα νέα ιστορικά προβλήματα.

Οι **W. Knorr** (1945-1997) και **D. Fowler** έχουν εξετάσει λεπτομερώς τη μαθηματική δραστηριότητα κατά την κρίσιμη εκείνη περίοδο στην οποία, με ε-

Βιβλιογραφία

ΘΩΜΑΪΔΗΣ Γ.,

«Γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι και οι αρχαίοι Έλληνες τις εξισώσεις 2ου βαθμού; Μερικά νεώτερα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας», *Διάσπαση*, 1-2 (1992), σ. 56-64.

ΘΩΜΑΪΔΗΣ Γ.-ΚΑΣΤΑΝΗΣ Ν.,

«Ο όρος "γεωμετρική άλγεβρα" στο στόχαστρο μιας σύγχρονης επιστημολογικής διαμάχης», στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*, επιμ. Δ. Αναπολιτάνος-Β. Καρασμάνης, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1993, σ. 27-52

ΚΑΣΤΑΝΗΣ Ν.-ΤΟΚΜΑΚΙΔΗΣ Α.,

«Η ιστορική κληρονομιά των "Στοιχείων" του Ευκλείδη στην ανθρωπότητα» στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*, επιμ. Δ. Αναπολιτάνος-Β. Καρασμάνης, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1993, σ. 67-92.

ΚΑΣΤΑΝΗΣ Ν.,

«Τα επιστημονικά κείμενα του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού και η νεοελληνική πραγματικότητα», *Ενημερωτικό φυλλάδιο της Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας των Επιστημών και της Τεχνολογίας*, 5 (Ιούνιος 1993), σ. 6-13

ΚΟΥΡΝΙΑΤΗ Α.Μ.,

Οπτικά του Ευκλείδη και Προοπτικές Απεικονίσεις,

Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Αρχιτεκτόνων ΕΜΠ, Αθήνα 1998

ΛΥΠΟΥΡΛΗΣ Δ.,

«Η στάση της ελληνικής κλασικής φιλολογίας στα επιστημονικά κείμενα της αρχαιότητας: εμπειρίες, διαπιστώσεις, προοπτικές», *Ενημερωτικό φυλλάδιο της Ελληνικής Εταιρείας Ιστορίας των Επιστημών και της Τεχνολογίας*, 5 (Ιούνιος 1993), σ. 13-16

ΜΠΡΙΚΑΣ Μ.,

Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της Αρχαιότητας, Αθήνα 1970.

ΠΑΠΑΓΓΕΛΗΣ Θ.,

«Ελληνική κλασική φιλολογία: ζητείται μέλλον», *Η Καθημερινή-Επτά Ημέρες*, 23 Σεπτεμβρίου 2001, σ. 30-31.

ΠΟΥΛΟΣ Α.,

Ελληνική Μαθηματική Βιβλιογραφία (1500-1900). Συνοπτική ιστορία του ελληνικού μαθηματικού βιβλίου, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα 1988

ΣΤΑΜΑΤΗΣ Ε.,

Η ελληνική επιστήμη, Αθήνα 1968, *Απαντα Αρχιμήδους*, τόμ. Α' 1970, τόμ. Β' 1973, τόμ. Γ' 1974, *Τα καυσικά κάτοπτρα του Αρχιμήδους*, Αθήνα 1982.

ΦΙΛΗ Χ.,

«Πυθαγόρας, Αρχιμήδης και ινδικές

μαθηματικές θεωρίες», *Φιλοσοφία*, Επετηρίς του Κέντρου Ερεύνης της Ελληνικής Φιλοσοφίας, Ακαδημία Αθηνών, Αθήνα 1985-86, σ. 156-171, «Από τη λογική των ανισοτήτων στην άλγεβρα των ανισοτήτων: Αρχιμήδης και Lagrange, οι δύο εκπρόσωποι», στο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*, επιμ. Δ. Αναπολιτάνος-Β. Καρασμάνης, εκδ. Τροχαλία, Αθήνα 1993, σ. 219-242.

BERGGREN J.L.,

«History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research», *Historia Mathematica*, 11 (1984), σ. 394-410.

FOWLER D.,

«Investigating Euclid's Elements», *British Journal for the Philosophy of Science*, 34 (1983), σ. 57-70.

KNORR W.R.,

«New Readings in Greek Mathematics: Sources, Problems, Publications», *Impact of Science on Society*, 40 (1990), σ. 207-218.

SAITO, K.,

«Mathematical Reconstructions out, Textual Studies in 30 years in the Historiography of Greek Mathematics», *Revue d'histoire des mathematiques*, 4 (1998), σ. 131-142.